كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال عن الشّبكات : إنّ مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المغايرة للصّفر تشكل شبكة بالنّسبة لعلاقة الترتيب الجزئي المعرفة بالشكل :

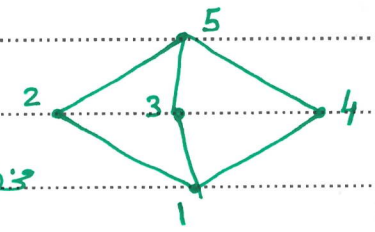
$x|y \iff x \leq y$ و $x|y \iff xRy$

في هذه الحالة إنّ :

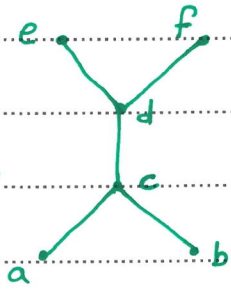
$x \vee y = \sup\{x,y\} = LcM(x,y)$

$x \wedge y = \inf\{x,y\} = g.c.d(x,y)$

مثال آخر : استنتاج الشبكات من مخطط هاس :



مخطط (2)



مخطط (1)

• المخطط (1) : لايمثل شبكة لأنّ : $\sup\{e,f\} \notin T$ حيث :

$T = \{a,b,c,d,e,f\}$

• المخطط (2) : يمثل شبكة لأنّه : $T = \{1,2,3,4,5\}$

$\forall x,y \in T \; ; \; \sup\{x,y\} \in T \quad \inf\{x,y\} \in T$

* يُرمز للشبكة بالبنية $(T, \leq, \vee, \wedge)$.

برهنة : إذا كانت $(T, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة فإنّه من أجل $x,y \in T$

يتحقق :

1) $x \leq y \iff x \vee y = y$

2) $x \leq y \iff x \wedge y = x$.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

الإثبات: ($\Leftarrow$) نفرض أنّ: $x \vee y = y$ عندئذٍ بحسب تعريف الحد الأعلى الأصغري لذلك فإنّ $x \le y$

بالعكس ($\Rightarrow$) إذا كان $x \le y$ فإنّ y حدّ أعلى لـ $\{x, y\}$ إذاً:

$y \le \sup\{x, y\} \le y$ إذاً نستنتج أنّ $\sup\{x, y\} = y$

$\Rightarrow x \vee y = y$

نفس المناقشة تتم للثانية.

مبرهنة: لتكن الشبكة $(T, \le, \vee, \wedge)$ عندئذٍ من أجل أي $x, y, z \in T$

أيّ الشرطين التاليين متكافئين

1. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
2. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

الإثبات: 1 $\Leftarrow$ 2

$$t_2 = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = [(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z]$$
$$= x \wedge [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] = [x \wedge (x \vee z)] \wedge (y \vee z)$$
$$= x \wedge (y \vee z) = t_1$$

2 $\Leftarrow$ 1

$$t_2 = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] =$$
$$x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] = [x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z) =$$
$$x \vee (y \wedge z) = t_1$$

مبرهنة: في أي شبكة $(T, \le, \vee, \wedge)$ تتحقق المتراجحات التوزيعية التالية:

1. $x \wedge (y \vee z) \ge (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
2. $x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

الإثبات: 1 إنّ $(x \wedge y) \le x$ وكذلك فإنّ

$x \wedge y \le y \le y \vee z$ وبالتالي فإنّ

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبالتّالي: $(x \wedge y) \leq x \wedge (y \vee z)$

$x \wedge z \leq x$ ، $x \wedge z \leq z \leq y \vee z$

إذاً: $(x \wedge z) \leq x \leq (y \vee z)$ وبالتالي: $x \wedge (y \vee z)$

هيَ أصغر من $(x \wedge y)$ و $(x \wedge z)$ إذاً:

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

2) إنّ: $x \leq x \vee y$

$y \wedge z \leq y \leq x \vee y$

$$y \wedge z \leq x \vee y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y \quad (*)$$

إنّ: $x \leq x \vee z$ وإنّ $y \wedge z \leq z \leq x \vee z$

$y \wedge z \leq (x \vee z)$

$$x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z \quad (**)$$ إذاً

من (*) و (**) أصبح لدينا $x \vee (y \wedge z)$ هيَ أدنى لـ $(x \vee y)$ و $(x \vee z)$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

تعريف: نقول إنّ الشبكة $(\wedge, \vee, \leq, T)$ هي شبكة توزيعية إذا تحقّقت أحد المتراجحتين التاليتين

1) $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

ملاحظة: بتحقّق أحد المتراجحتين السابقتين سوف نحصل على أحد المساواتين التاليتين

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

وتحقّق أحدهما كفيل بتحقّق الأخرى.

تعريف: لتكن $(\wedge, \vee, \leq, T, 0, 1)$ شبكة محدودة وليكن $x \in T$ بحيث

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أنّه يوجد $y \in T$ يحقّق $x \vee y = 1$ و $x \wedge y = 0$ عندئذٍ نقول بأنّ y هو متمم العنصر x ويرمز له $\bar{x}$ إذاً $x \wedge \bar{x} = 0$ و $x \vee \bar{x} = 1$

تعريف: إذا كان لكل عنصر $x \in T$ متمم $\bar{x}$ في الشبكة $(T, \leq, \vee, \wedge, 0, 1)$ عندئذٍ نقول إنّ هذه الشبكة هي شبكة متممة ونرمز لها بالرمز:

$(T, \leq, \vee, \wedge, 0, 1, -)$.

تعريف: لتكن $(T, \leq, \vee, \wedge, 0, 1, -)$ شبكة

1- توزيعية
2- مغلقة
3- متممة

$\Leftarrow$ عندئذٍ نقول بأنّ T هي شبكة بولينية.

مثال: برهن أنّ: $X \neq \emptyset$ و $\wp(X)$ أسرة المجموعات الجزئية من المجموعة X

1) $\forall A, B \in \wp(X)$ إنّ: $A \vee B = A \cup B$ و $A \wedge B = A \cap B$

2) يوجد عنصر أكبر هو X وعنصر أصغر هو $\emptyset$

3) لكل عنصر $A \in \wp(X)$ متمم هو $X \setminus A$

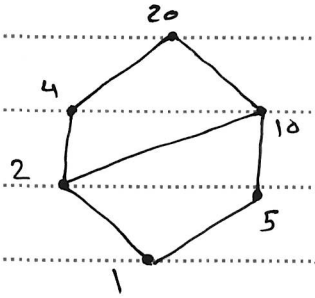
إذاً: $(\wp(X), \subseteq, \cup, \cap, \emptyset, X, -)$ شبكة بولينية.

تطبيق: هل تمثل مخطط هاس الشبكة $D(20)$ حيث $D(20)$ تمثل مجموعة قواسم العدد 20 المزودة بعلاقة $\mid$ (يقسم)، ثمّ قرّر فيما إذا كانت بولينية؟

الحل:

$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

إنّ المخطط الجانب يمثل شبكة لأنّه:



$\forall x, y \in D(20)$

إنّ $x \vee y \in D(20)$ و $x \wedge y \in D(20)$

وهي شبكة مغلقة لأنّ: صغرها هو 1 وأكبرها هو 20.

إنّ العدد 2 ليس له متمم لأنّ:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$2 \vee 2 = 2$ ، $2 \vee 10 = 10$ ، $2 \vee 4 = 4$ ، $2 \vee 5 = 10$

كما أنّ : $2 \wedge 2 = 2$ و $2 \wedge 5 = 1$ و $2 \wedge 4 = 2$ و $2 \wedge 10 = 2$

إذاً الشبكة ليست بولينية.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة