كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مقدمة في الشبكات:

لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين. نعرّف الجداء الديكارتي لهاتين المجموعتين:

$$E \times F = \{(x,y) \; ; \; x \in E \; , \; y \in F\}$$

كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $E \times F$ تعرّف علاقة ثنائية من E إلى F رمزها R وبيان هذه العلاقة $G_R \subseteq E \times F$.

• بفرض أنّ R هي علاقة ثنائية على E أي أنّ $G_R \subseteq E \times E$ إنّ R علاقة ترتيب إذا حققت الشروط التالية:

1. R انعكاسية: $(\forall x \in E) \quad (xRx)$
2. R تخالفية: $(\forall x,y \in E)\left[((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x=y)\right]$
3. R متعدية: $(\forall x,y,z \in E)\left[((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)\right]$

عندما نعرّف علاقة ترتيب على مجموعة E نقول إنّ هذه المجموعة مرتّبة جزئياً:

1. $\mathbb{N}^*$ مع علاقة $|$ (القسمة) مجموعة مرتّبة جزئياً.
2. X مجموعة غير خالية فإنّ $p(X)$ هي أسرة المجموعات الجزئية من X. إنّ $(p(X), \subseteq)$ هي علاقة ترتيب جزئي.

تعاريف: تعريف (1): إذا كانت (E,R) مجموعة مرتّبة جزئية نقول عن العنصرين $x,y \in E$ أنهما متقارنان إذا تحقّق أنّ xRy أو yRx.

تعريف (2): إذا كانت (E,R) مجموعة مرتّبة جزئياً بحيث أنّ $(\forall x,y \in E) \Rightarrow [(xRy) \vee (yRx)]$ أي عنصرين كيفيين من E متقارنان عندئذٍ نقول بأنّ: (E,R) مرتّبة كلياً.

مثال: $(\mathbb{N}, \leq)$ حيث $\leq$ هي علاقة أصغر أو يساوي المألوفة. إنّ المجموعة السّابقة هي مجموعة مرتّبة كلّياً.

ملاحظة: نستخدم الرمز $\leq$ بدلاً من الرمز R للدلالة على أنّ x يرتبط مع y وفق العلاقة R ونكتب xRy فتكون $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة جزئياً عندما $\leq$ هي علاقة ترتيب.

- $x < y$ تعني x مرتبط مع y دون أن يساويه.

تعريف: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة جزئياً وليكن $x, y \in E$ نقول بأنّ y يشكّل تغطية لـ x إذا وفقط إذا كانت $x < y$ وبحيث لا يوجد عنصر $z \in E$ يحقّق: $(x \leq z) \wedge (z < y)$

مثلاً: $(\mathbb{N}, \leq)$ حيث $\leq$ هي أصغر أو يساوي المألوفة.

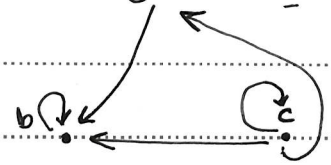
كل n تغطّيها $n+1$.

تمثيل العلاقات بيانياً:

1- الشكل الموجّه: لتكن R علاقة معرّفة على E حتّى تمثّل xRy نُنشئ بينهما موجّهاً من x إلى y. xRx نُنشئ حلقة موجّهة من x إلى نفسها.

$E = \{a, b, c\}$

$G_R = \{(a,b), (a,c), (b,b), (c,c), (c,a), (b,b)\}$



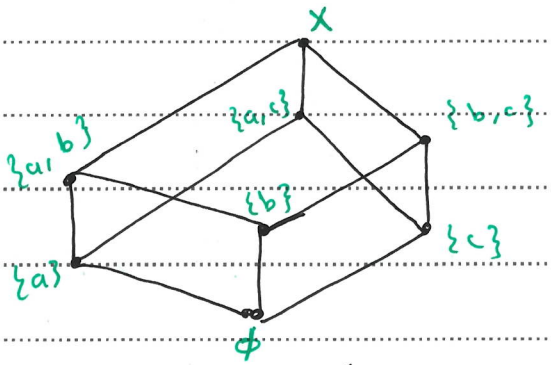
إنّ العلاقة المبيّنة في $G_R \subseteq E \times E$ هي علاقة ترتيب كلّي تجعل E مجموعة مرتّبة كلّياً.

2- مخطط هاس: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة جزئياً إذا كان y يغطّي x فإنّنا نصل بين x, y بقطعة مستقيمة.

تمرين: $X = \{a, b, c\}$ ، $(P(x), \subseteq)$ مثّلها بمخطط هاس؟

$P(x) = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



العناصر الخاصة:

لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة جزئياً

- g أكبر عنصر إذا وفقط إذا تحقق: $(g \in E) \wedge [(\forall x \in E) \Rightarrow (x \leq g)]$
- p أصغر عنصر في E إذا وفقط إذا تحقّق: $(p \in E) \wedge [(\forall x \in E) \Rightarrow (p \leq x)]$
- M أعظمي في E إذا وفقط إذا تحقّق $(M \in E) \wedge [(\forall x \in E) \Rightarrow (x \not\geq M)]$
- m أصغري في E إذا وفقط إذا تحقّق $(m \in E) \wedge [(\forall x \in E) \Rightarrow (x \not\leq m)]$

ملاحظات:

1. العناصر الخاصة ليس من الضروري أن تكون موجودة
2. العنصران الأكبر والأصغر إذا وُجدا فهما وحيدان
3. العنصر الأكبر هو عنصر أعظمي لكن العكس غير صحيح والعنصر الأصغر هو عنصر أصغري ولكن العكس غير صحيح
4. في المجموعات المرتبة كلياً يتطابق مفهوما العنصر الأكبر والعنصر الأعظمي كما يتطابق مفهوما العنصر الأصغر والعنصر الأصغري

مبرهنة: إذا كانت $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة جزئياً ومنتهية فإنها تحوي عنصر أعظمي واحد على الأقل كما تحوي عنصر أصغري واحد على الأقل.

الإثبات:

ليكن x عنصر كيفي من E هناك احتمالان:

① x غير متقارن مع أي عنصر آخر من E وبالتالي x أعظمي

② إذا وُجد $y \in E$ بحيث $x < y$ فإننا نناقش y فإذا كان y أعظمياً يتم

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المطلوب وإلاّ يوجد $f \in E$ بحيث $z < f$ لن تتمّ المناقشة على هذا المنوال إلى اللانهاية لذلك E مجموعة منتهية إذاً نصل إلى عنصر $h \in E$ بحيث:

$h <$ ..... $< z < y < x$ لايوجد $t \in E$ يحقّق $h < t$ إذاً t أعظمي

تعاريف: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة و $A \subset E$.

1) نقول عن S حيث $S \in E$ أنّه حدّ أعلى للمجموعة A إذا تحقّق $(\forall x \in A) \Rightarrow (x \leq S)$ في هذه الحالة نقول إنّ A مجموعة محدودة من الأعلى.

2) نقول عن $q \in E$ أنّه حد أدنى للمجموعة $A \subset E$ إذا تحقّق: $(\forall y \in A) \Rightarrow (q \leq y)$ إذا وُجِدَ مثل هكذا q نقول عن A محدودة من الأدنى.

ملاحظة: إنّ الحدّ الأدنى أو الحدّ الأعلى لمجموعة ما إذا وُجِدَ فليس من الضروري أنْ يكون وحيد.

مثال: $A = \{2, 3, 4, 9\}$ ح علاقة $|$ (يقسم):

$A \subset N$ $\quad q = 1$ حد أدنى

$S = 2 \times 3 \times 4 \times 9$ حد أعلى.

تعريف: $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة جزئياً و $A \subset E$.

1) نقول إنّ $S \in E$ هو حد أعلى أصغري للمجموعة $A \subset E$ إذا تحقّق

1) S حدّ أعلى

2) إذا وُجِدَ $S' \in E$ حدّ أعلى آخر للمجموعة A فإنّ $S \leq S'$ ونكتب $S = \text{Sup}(A)$

2) نقول إنّ $i \in E$ هو حدّ أدنى أعظمي للمجموعة $A \subset E$ ونكتب إذا تحقّق:

1) i هو حدّ أدنى

2) إذا وُجِدَ $i' \in E$ حدّ أدنى آخر للمجموعة A فإنّ $i \leq i'$ ونكتب $i = \inf(A)$

مبرهنة: إذا كانت $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً $B \subset A \subset E$ عندئذٍ:

1) $\text{Sup } B \leq \text{Sup } A$ $\quad$ 2) $\inf A \leq \inf B$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة جزئياً $A \subseteq F \subseteq E$ عندئذٍ:

1) $\sup_E A \leq \sup_F A$ 2) $\inf_F A \leq \inf_E A$

تعاريف:

تعريف (1): نقول عن مجموعة مرتّبة كلياً $(E, \leq)$ أنّها مرتّبة جيّداً إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية فيها تحوي على أصغر عنصر

تعريف (2): نقول عن مجموعة مرتّبة جزئياً $(E, \leq)$ أنّها شبه استقرائية إذا كانت كل مجموعة جزئية وغير خالية فيها مرتّبة كلياً هي مجموعة محدودة من الأعلى

تعريف الشبكات:

نقول عن مجموعة مرتّبة $(T, \leq)$ أنّها بشبكة إذا كانت تحقّق أنّه من أجل $x, y \in T$ فإنّ:

$$\inf\{x,y\} \in T \quad , \quad \sup\{x,y\} \in T$$

$$(\forall x,y \in T) \Rightarrow [(\inf\{x,y\} \in T) \wedge (\sup\{x,y\} \in T)]$$

نرمز $\sup\{x,y\} = x \vee y$

$\inf\{x,y\} = x \wedge y$

نعبّر عن الشبكة بالبنية $(T, \leq, \vee, \wedge)$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة