كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

- البراهين المنطقية.

لتكن A عبارة منطقية إنّ برهان A هو الحاكمة المنطقية التي نستطيع من خلالها أن نحكم على صحة أو خطأ هذه العبارة.

• نقول عن العبارة المنطقية A أنّها نظرية إذا كانت استدلالاً

$$A \equiv (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \Rightarrow B)$$

ندعو $A_1, \dots, A_n$ مقدّمات للنظرية المعروضة B ندعوها النتيجة المطلوبة

ملاحظة: تجدر الاشارة أنّه وفي حال كانت إحدى المقدّمات A_i في النظرية خاطئة فإنّ المقدمة $A_1 \cap \dots \cap A_n$ تصبح خاطئة وهذا يعني أنّ العبارة المنطقية $A_1 \cap A_n \cap \dots \cap A_n \to B$ تكون صحيحة دوماً بغض النظر عن قيمة الحقيقة للقضية المنطقية B لذلك فإنّنا نفترض دوماً صحّة المقدّمات (الفرضيات) في النظرية

طرائق البرهان: [1] - الاستنتاج المباشر.

$$[A \cap (A \to B)] \Rightarrow B$$

$$\frac{A \to B \,,\, A}{\therefore \quad B}$$

إنّ إثبات $A \to B$ قد لا يتم بخطوة واحدة وإنّما عن طريق مجموعة من الخطوات

$$\frac{A \to R_1 \,,\, R_1 \to R_2 \,,\, \dots \,,\, R_n \to B \,,\, A}{\therefore \quad B}$$

إذا عبّرنا عن المقدّمة بشكل إفادة $A(x)$ والنتيجة إفادة $B(x)$

$$(\forall x \in D)\,(A(x) \to R(x)) \wedge (\forall x \in D)\, R(x) \to B(x)$$

$$\equiv (\forall x \in D)\,[(A(x) \to R(x)) \wedge (R(x) \to B(x))]$$

$$\equiv (\forall x \in D)\,(A(x) \to B(x))$$

مثال: برهن باستخدام مبدأ الاستنتاج المباشر أنّه إذا كان n عدد صحيح زوجي فإنّ n^2 هو عدد صحيح زوجي.

الاثبات: $A(n)$ تمثل أنّ العدد الطبيعي n هو عدد صحيح زوجي

$B(n)$ تمثل أنّ n^2 هو عدد صحيح زوجي

المطلوب اثباته $(\forall n \in \mathbb{N})\,(A(n) \to B(n))$

نعرّف $R_1(n,m)$ إفادة تمثل أنّ $n=2m$

$R_2(n,m)$ إفادة تمثل أنّ $n^2=4m^2$

$R_3(m,k)$ إفادة تمثل أنّ $4m^2=2k$

• $(\forall n \in \mathbb{Z})\,(A(n) \to R_1(n,m)) \wedge (\forall n,m \in \mathbb{Z})\,(R_1(n,m) \to R_2(n,m))$
$\wedge\,(\forall n,m \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z})\,(R_2(n,m)) \to R_3(m,k))$

• $(\forall m,k \in \mathbb{Z})\,(R_3(m,k) \to B(n))$

• $(\forall n \in \mathbb{N})\,(A(n) \to B(n))$

2 البرهان بطريقة المثال المعاكس:

$(\forall x \in D)\,(p(x))$

نعتمد على نفي العبارة المكممة:

$\neg(\forall x \in D)\,(p(x)) \equiv (\exists x \in D)\,(\neg p(x))$

تمرين: أثبت أنّه: إذا كان $x<y$ فإنّ $x^2 \le y^2$ ليست نظرية حيث $x,y \in \mathbb{R}$ $(\forall x,y \in \mathbb{R})\,(A(x,y))$

$A(x,y) \equiv B(x,y) \to q(x,y)$

$p(x,y)$ إفادة تمثل أنّ $x<y$

$q(x,y)$ إفادة تمثل أنّ $x^2<y^2$

سنثبت أنّ $(\forall x,y \in \mathbb{R})\,(p(x,y) \to q(x,y))$

$(\exists x,y \in \mathbb{R})\,\neg(p(x,y) \to q(x,y))$

$(\exists x, y \in \mathbb{R})\ \neg(\neg p(x,y) \vee q(x,y))$

$\boxed{(\exists x, y \in \mathbb{R})\ (p(x,y) \wedge \neg q(x,y))}$ (*)

نُلاحظ أنَّ العبارة المكممة (*) هي عبارة مكممة وجودياً ومجموعة الصواب لها

$T_p \neq \phi$ لوجود $(-5, -3) \in T_p$

3 البرهان بطريقة التّعويض:

إذا كانت $A(x)$ إفادة مجموعتها الشاملة منتهية وعدد عناصرها قليل فإنّهُ بالإمكان في كل مرة أن نعوّض عنصراً من عناصر المجموعة للتحقق من أنّ الإفادة تتحوّل إلى قضية منطقية صحيحة لأجل هذا العنصر $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$(\forall x \in D)\ (A(x)) \equiv A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \ldots \wedge A(x_n)$

أما في حال لم تكن العبارة نظرية

$(\exists x \in D)(\neg A(x)) \equiv \neg A(x_1) \vee \neg A(x_2) \vee \ldots \vee \neg A(x_n)$

تمرين: $A(x)$ إفادة تمثل

$n^2 + n + 41$ عدد أولي مجموعتها الشاملة $D = \{1, 2, 3, 4\}$

الحل: بطريقة البرهان بالتعويض

$A(1) = 43$, $A(2) = 47$, $A(3) = 53$, $A(4) = 61$

كل الأعداد السّابقة هي أعداد أولية إذاً $A(1) \wedge A(2) \wedge A(3) \wedge A(4)$

إنّ العبارة السابقة تشكل نظرية

ولكن إذا غيّرنا مجموعة التّعويض لتصبح $\mathbb{Z}$ عندئذٍ نُلاحظ أنّ:

$(\exists x \in \mathbb{Z})\ (\neg A(x))$

من أجل $x = 41$

$A(41) = (41)^2 + (41) + (41) = 41(41 + 2) = 41(43)$

وبالتّالي في هذه الحالة إنّ العبارة لا تشكل نظرية.

4 البرهان بطريقة التقسيم إلى حالات

1. إمّا أن نقسّم المجموعة الشاملة D إلى مجموعتين منفصلتين $D = D_1 \cup D_2$ بحيث $D_1 \cap D_2 = \Phi$

2. أن تقسم الافادة p إلى q و h بحيث $p = q \wedge h$

• في الحالة الأولى:

$$(\forall x \in D)(p(x)) \equiv [(\forall x \in D_1)(p(x))] \wedge [(\forall x \in D_2)(p(x))]$$

• في الحالة الثانية:

$$(\forall x \in D)(p(x)) \equiv [\forall x \in D][q(x) \wedge h(x)] \equiv [(\forall x \in D)\, q(x)] \wedge [(\forall x \in D)(h(x))]$$

• نفي الحالة الأولى:

$$[(\exists x \in D_1)(\neg p(x))] \vee [(\exists x \in D_2)(\neg p(x))]$$

• نفي الحالة الثانية:

$$[(\exists x \in D)(\neg q(x))] \vee [(\exists x \in D)(\neg h(x))]$$

5. البرهان بالتناقض:

إذا كانت A عبارة منطقية وكان فرضنا $\neg A$ يقود إلى تناقض مع نظرية برهنت سابقاً أو نقض مسلمة معروفة عندئذٍ تكون A صحيحة

تمرين: أثبت أنّ $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي؟

6. البرهان بنقض الفرض أو المعكوس الايجابي:

• إذا أردنا أن نبرهن $A \to B$ يمكن استخدام $(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$

$$\frac{\neg B \to \neg A \,,\ \neg B}{\therefore\ \neg A}$$

أي نفرض أنّ النتيجة خطأ فنصل إلى تناقض مع الفرضية (المقدمة)

تمرين: إذا كان n^2 فردي فإنّ n فردي.

$A(n)$: n^2 عدد فردي $B(n)$: n عدد فردي

نفرض $\neg B(n)$ أي أنّ n زوجي عندئذٍ n^2 زوجي وهذا يحقق $\neg A(n)$

وبالتالي $A(n) \to B(n) \equiv T$

7- البرهان بالاستقراء الرياضي:

• الاستقراء الرياضي: وهو طريقة فعّالة لاثبات صحة العبارات المكممة شمولياً والتي مجموعتها الشاملة IN أو مجموعة جزئية منها

أولاً: المبدأ الأول في الاستقراء الرياضي:

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية في IN تحقق الخاصيتين التاليتين:

① $1 \in S$

② إذا كان $n \in S$ فإنّ $n+1 \in S$ عندئذٍ $S = IN$.

الإثبات: $M = \{x \in IN \ ; \ x \notin S\}$

وبفرض أنّ $M \neq \phi$ عندئذٍ بحسب مبدأ الترتيب العام يوجد عدد أصغري $n \in M$ و $m \neq 1$ إذاً $m-1 \in S$ مما يعني أنّ $m-1+1 \in S$ أي $m \in S$ وهذا تناقض سببه فرضنا أنّ $M \neq \phi$ إذاً $M = \phi$ بالتالي $S = IN$.

ثانياً: المبدأ الثاني في الاستقراء يعتمد على:

① $1 \in S$

② إذا كان $m \in S$ لأجل كل $m < n$ عندئذٍ فإنّ $n \in S$

تمارين: 1. برهن صحة المساواة: $\sum_{1}^{n} 2^n = 2(2^n - 1)$

2. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية فيبوناتشي

$u_1 = 1$, $u_2 = 1$, ... , $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

أثبت أنّ $u_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ لكل $n \geq 1$

3. كل عدد طبيعي $n \geq 2$ هو إما عدد أولي أو جداء منتهٍ لعدد من الأعداد الأولية.

انتهت المحاضرة