كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة : الرابعة/نظري/

# {{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z




يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

**الإفادة:** هي كل عبارة مفتوحة أي كل جملة خبرية تحوي عدداً منتهياً من المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ تأخذ قيمها من مجموعة $D$ تسمّى المجموعة الشاملة للإفادة بحيث أنّه ومن أجل أي قيمة للمتغيرات $x_1, \dots, x_n$ نحصل على عبارة منطقية.

مثلاً: $p(x,y,z)$ إفادة تمثّل $x^2+y^2=z^2$ حيث $x,y,z \in \mathbb{N}$.

إنّ $p(3,4,5)$ قضية منطقية محققة

بينما $p(1,2,3)$ $p(1,2,3)$ قضية منطقية خاطئة.

**تعريف** لتكن $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ إفادة مجموعتها الشاملة $D$، إنّ مجموعة الصّواب لهذه الإفادة هي مجموعة القيم $(a_1, \dots, a_n) \in D^n$ التي تجعل العبارة المنطقية $p(a_1, \dots, a_n)$ عبارة منطقية محققة

$$T_p = \{(a_1, \dots, a_n) \in D^n \ , \ p(a_1, \dots, a_n) \equiv T\}$$

**مثال:** أوجد مجموعة الصواب لكل من الإفادات التالية:

① $p(x)$ هي $x+2=5$ حيث $D=\mathbb{N}$.

مجموعة الصّواب $T_p = \{3\}$

② $q(x)$ تمثّل الإفادة $x-2<5$ في $\mathbb{R}$ حيث $D=\mathbb{R}$.

مجموعة الصواب $T_p = ]-\infty, 7[$

③ $h(x)$ هي $x^2+1=0$ و $D=\mathbb{R}$

مجموعة الصواب $T_p = \phi$

- التقرير الوجودي والتقرير الشّمولي.

- الكمّ الشمولي رمزه $\forall$ واسمه Universal quantifier يُقرأ أياً يكن

- المكمم الوجودي رمزهُ $\exists$ واسمهُ Exitential quantifier يُقرأ يوجد على الأقل

- تكون العبارة $(\forall x_1, \dots, x_n \in p)\ (p(x))\quad x=(x_1, \dots, x_n)$ صحيحة إذا وفقط إذا كان $T_p = D$ حيث D هي المجموعة الشاملة للإفادة $p(x)$

بينما تكون العبارة $x \in D^n \quad (\exists x_1, \dots, x_n)(p(x))$ صحيحة إذا وفقط إذا $T_p \neq \phi$

مثال: ليكن التعبير الوجودي $(\exists x \in R)\ p(x)$ حيث $p(x)$ تمثل الافادة $x^2 - 2 = 0$ مجموعتها الشاملة R. هذا التعبير الوجودي السابق يمثل عبارة صحيحة لأنهُ $T_p = \{\pm\sqrt{2}\} \neq \phi$

- المكمم الوجودي المتعد: $\exists!$ رمزهُ Exclusive exitential quantifier

$(\exists! x \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N})\ p(x,n)$

حيثُ $p(x,n)$ تمثل الافادة $x/n$ و $T_p = \{1\}$

ملاحظات: 1- الافادة قد تكون بسيطة (بمتغير واحد) أو مركبة.

2- تغيير المتحولات لا يؤثر على الافادة

3- الرمز $\forall$ إبدالي والرمز $\exists$ ابدالي ويكن المكممان الوجودي والشمولي غير ابدالين عمومًا

$(\forall x \in A, \forall y \in B)\ p(x,y) \equiv (\forall y \in B, \forall x \in A)\ p(x,y)$

$(\exists x \in A, \forall y \in B)\ p(x,y) \not\equiv (\forall y \in B, \exists x \in A)\ p(x,y) \not\equiv (\forall x \in A, \exists y \in B)\ p(x,y)$

4- المكمم الشمولي توزيعي على أداة الوصل

$(\forall x \in D)\ (p(x) \wedge q(x)) \equiv [\forall x \in D\ (p(x))] \wedge [(\forall x \in D)\ (q(x))]$

5- المكمم الوجودي غير توزيعي على أداة الربط $\wedge$

مثلاً: $p(x)$: $x$ صحيح زوجي ، $q(x)$: $x$ صحيح فردي



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(\exists x \in \mathbb{Z}_4)(p(x) \wedge q(x)) \neq (\exists x \in \mathbb{Z}_4)[p(x)] \wedge (\exists x \in \mathbb{Z}_4)(q(x))$

$T_p$ مجموعة الصواب للعبارة المكممة الأولى هي $\phi$

بينما $T_p \neq \phi$ في العبارة المكممة الثانية

$T_{p_1} = \{2n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$

$T_{p_2} = \{2n+1 \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$

6- المكمم الوجودي توزيعي على الفصل $\vee$ والمكمم الشمولي غير توزيعي على الفصل $\vee$

مثلاً: $T_p \equiv \mathbb{Z}_4$ $\forall x \in \mathbb{Z}_4 \; [p(x) \vee q(x)]$

$[(\forall x \in \mathbb{Z}_4)(p(x))] \vee [(\forall x \in \mathbb{Z}_4)(q(x))]$

$T_{p_1} = \phi$ مجموعة الصواب للعبارة المكممة الأولى

$T_{p_2} = \phi$ مجموعة الصواب للعبارة المكممة الثانية

• نفي العبارات المكممة شمولياً والعبارات المكممة وجودياً:

$\neg[(\forall x \in D)(p(x))] \equiv (\exists x \in D)(\neg p(x))$

$\neg[(\exists x \in D)(p(x))] \equiv (\forall x \in D)(\neg p(x))$

تمارين في منطق الإفادة:

1) ناقش الخاصية الابدالية في الحالة التالية

$(\exists x \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, \forall y \in \mathbb{N}\setminus\{1\}).p(x,y)$

حيث $p(x,y)$ تمثل $xly$ $(\forall y \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \; ; \; \exists x \in \mathbb{N}\setminus\{1\})$

في العبارة المكممة الأولى إن $T_p = \phi$ بينما في العبارة المكممة الثانية

$T_p = \mathbb{N}\setminus\{1\}$

2) أثبت أن المكمم الشمولي توزيعي على أداة الربط $\wedge$:

$(\forall x \in D)[p(x) \wedge q(x)] \equiv (\forall x \in D).p(x) \wedge (\forall x \in D).q(x)$

البرهان: إن العبارة $(\forall x \in D)[p(x) \wedge q(x)]$ تكون صحيحة فقط عندما تكون العبارة $p(x) \wedge q(x)$ صحيحة من أجل كل قيم $D$ وهذا يتحقق إذا وفقط إذا كانت $p(x)$ صحيحة من أجل كل قيم $x$ و $q(x)$ صحيحة من أجل كل قيم $x$ وهذا



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ماتمثله العبارة المكممة: $(\forall x\in D)(p(x)) \wedge (\forall x\in D)(q(x))$

3. أثبت أن: $\neg[(\forall x\in D)\ .\ p(x)] \equiv [(\exists x\in D)\ \neg p(x)]$

الاثبات:

إن العبارة $\neg[(\forall x\in D)\ .\ p(x)]$ تعني أنه ليس صحيحاً أنه لأجل أي عنصر كيفي من D فإن p(x) صحيحة مما يعني أنه يوجد على الأقل عنصر من D يجعل p(x) خاطئة أي $\neg p(x)$ صحيح وهذا ماتعبر عنه العبارة المكممة $(\exists x\in D)\ .\ \neg p(x)$

• نفي المكمم الوجودي المقصور:

$$(\exists! x\in D)\ .\ p(x) \equiv [(\exists x\in D).p(x)] \wedge [(\forall y\in D)\ (p(x)\wedge p(y)) \rightarrow (x=y)]$$

نفيها $(\exists x\in D, \forall y\in D)[p(x)\wedge(p(x)\wedge p(y)) \rightarrow (x=y)]$

$$\neg(\exists! x\in D)\ .\ p(x) \equiv (\neg(\exists x\in D, \forall y\in D))\ \neg(p(x)\wedge(\neg(p(x)\wedge p(y)) \vee (x=y)))$$

$$\equiv (\forall x\in D, \exists y\in D)[\neg p(x) \vee (p(x)\wedge p(y)\wedge(x\neq y))]$$

تعريف: تكون العبارتان المكممتان $A(x)$ و $B(x)$ متكافئتين إذا تحقق الشرط:

من أجل أي مجموعة شاملة لهما فإن الاقترانات التي تتضمنها هاتان العبارتان تأخذ نفس قيم الحقيقة.

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z