كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

• زمر الهومومورفيزمات:

ليكن لدينا $(R,+,.)$ حلقة واحدية وليكن لدينا A و B موديولين فوق R وليكن $f \in Hom_R(A,B)$ وليكن M موديول فوق R عندئذٍ نسمي التطبيق:

$f_*: Hom(M, A) \to Hom(M,B)$ المعرّف بالشكل $f_*\theta = f\circ\theta$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "f\circ\theta"] & \\ A \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

بالهومومورفيزم النّاتج عن f

والتّطبيق:

$f^*: Hom(B,M) \to Hom(A,M)$ المعرّف بالشكل $f^*(\theta) = \theta\circ f$

$$\begin{tikzcd} & M & \\ A \arrow[ur, "\theta\circ f"] & & B \arrow[ul, "\theta"'] \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd}$$

ب الهومومورفيزم الناتج عن f

نظرية: لتكن لدينا $(R,+,.)$ حلقة واحدية ولنفرض لدينا المتتالية $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ متتالية من الموديولات فوق R والهومومورفيزمات عندئذٍ المتتاليتين:

$$0 \to Hom(M,A') \xrightarrow{f_*} Hom(M,A) \xrightarrow{g_*} Hom(M,A'')$$

$$0 \to Hom(A'',M) \xrightarrow{f^*} Hom(A,M) \xrightarrow{g^*} Hom(A',M)$$

تامتين؟

الإثبات: f متباين و g غامر و $g\circ f = 0$ و $Imf = kerg$

f_* هو تطبيق متباين لأنَّ: $\forall \theta \in kerf_* \Rightarrow f_*(\theta) = 0 \Rightarrow f\circ\theta = 0$

لكن f متباين $\Leftarrow$ $\theta = 0$ $\Leftarrow$ $kerf_* = \{0\}$

إذاً f تطبيق متباين

• لإثبات أنَّ المتتالية $0 \to Hom(M,A') \xrightarrow{f_*} Hom(M,A)$

تمامة لنثبت أنّ: $Imf_* = kerg_*$

$\forall \theta \in Imf_* \Rightarrow \exists \theta \in Hom(M, A') \; ; \; \theta = f_*(\theta_1) \quad \theta = f o \theta_1$

$g_*(\theta) = g o \theta = g o (f o \theta_1) = (g o f) o \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta \in kerg_*$

$\boxed{Imf_* \subseteq kerg_*}$ (*)

$\forall \theta \in kerg \Rightarrow g_*(\theta) = 0 \Rightarrow g o \theta = 0 \Rightarrow (g o \theta)(x) = 0 \; ; \; \forall x \in M$

$\Rightarrow g(\theta(x)) = 0 \Rightarrow \theta(x) \in kerg \Rightarrow \theta(x) \in kerg = Imf$

$\exists a' \in A' \; ; \; \theta(x) = f(a')$

بما أنّ f متباين ⇐ a' هو عنصر وحيد حيث $f(a') = \theta(x)$

لنعرّف التطبيق: $\theta_1 : M \to A'$ حيث $\theta(x) = a'$

$\Rightarrow \theta_1 \in Hom(M, A')$

$\theta(x) = f(a') = f(\theta_1(x)) = (f o \theta_1)(x) \Rightarrow \theta = f o \theta_1 = f_*(\theta_1)$

$\Rightarrow \theta \in Imf_* \Rightarrow \boxed{kerg_* \subseteq Imf_*}$ (**)

من العلاقتين (*) و (**) نجد أنّ $kerg = Imf_*$

إذاً المتتالية المفروضة تامة

• المتتالية الثانية وظيفة

انتهت المحاضرة

مكتبة A to Z

فرع 1
تجمع الكليات (كلية العلوم)
فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960