كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٣

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تمرين: لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية ونفرض أنّ المخطط التالي من المودولات والهومومورفيزمات تبادلي

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

وأنّ سطريه متتاليات تامتان فإنّه:

[أ] إذا كان r و p و r مونومورفيزمات فإنّ q مونومورفيزم

[ب] إذا كان q و p و r ايبومورفيزمات فإنّ q ايبومورفيزم.

الحل:

[أ] $\ker f \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ حيث i التباين القانوني

θ الهومومورفيزم الصفري

z الاحتواء القانوني

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{\theta} & A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ 0 & \xrightarrow{z} & A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

بما أنّ هذا المخطط بسطريه متتاليات تامتان و θ هو ايبومورفيزم. لنبيّن أنّ هذا المخطط تبادلي أي لنبرهن أنّ $p\circ i = z\circ\theta$

$$\forall x\in \ker f \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow (z\circ\theta)(x)=z(\theta(x))=z(0)=0$$

وكذلك:

$$(p\circ i)(x)=p(i(x))=p(x)$$

$$f'(p(x))=(f'\circ p)(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(0)=0 \Rightarrow$$

$$p(x)\in \ker f'$$

لكن f' متباين وبالتالي $\ker f'=0$ ومنه $p(x)=0$ إذاً $(p\circ i)(x)=0$

$$\Rightarrow (z\circ\theta)(x)=(p\circ i)(x) \quad \forall x\in\ker f \Rightarrow z\circ\theta = p\circ i$$

الآن بما أنّ p و r مونومورفيزم و θ ايبومورفيزم فإنّ q مونومورفيزم وذلك

حسب [2] من نظرية التماثلات الأربعة.

[2] $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\theta} O$ حيث π الغمر القانوني و z الاحتواء

القانوني و θ الهومومورفيزم الصفري.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\pi} & C/\mathrm{Im}g = \mathrm{coker}g \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r & & \downarrow z \\ A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' & & \end{array}$$

فإنّ هذا المخطط سطريه متتاليتان تامتان و z هو مونومورفيزم

لنبيّن أنّ هذا المخطط تبادلي أي لنبرهن أنّ $z \circ \theta = \pi \circ r$

وذلك لأنّ g غامر $\forall x \in C \Rightarrow \exists b \in B \; ; \; x = g(b)$

ويكون: $(z \circ \theta)(x) = z(\theta(x)) = z(o) = o$

وكذلك:

$$(\pi \circ r)(x) = \pi(r(x)) = \pi(r(g(b))) = \pi((r \circ g)(b)) = \pi((g' \circ q)(b))$$

$$= (\pi \circ (g' \circ p))(b) = ((\pi \circ g') \circ q)(b) = o$$

لأنّ $\pi \circ g' = o$ تركيب لتطبيقين متتاليين في متتالية تامة.

ومنه: $(z \circ \theta)(x) = (\pi \circ r)(x) = o \quad \forall x \in C$

$\Rightarrow z \circ \theta = \pi \circ r$

والآن بما أنّ p و r ايبومورفيزم و z مونومورفيزم فإنّ q ايبومورفيزم حسب (1) من نظرية التماثلات الأربعة.

• **المودول الحر على مجموعة:**

لتكن $(R, +, .)$ حلقة واحدية، و S مجموعة ما، ولنرمز بـ F لمجموعة كل التطبيقات $\theta : S \to R$ بحيث $\theta(s) = o$ من أجل جميع عناصر S ما عدا عدد منتهٍ منها. ولنعرّف على F عمليتين: داخلية $(+)$ بالشكل:

$$(\theta + \theta')(s) = \theta(s) + \theta'(s)$$

وخارجية $(\cdot)$ بالشكل: $(\lambda \cdot \theta)(s) = \lambda \cdot \theta(s)$

وذلك $\forall \theta, \theta' \in F, \; \lambda \in R, \; s \in S$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خاوية F مودول خوق R ولبيّن أنّ F مودول حرّ فوق R

- لنعرّف التّطبيق $f: S \to F$ بالشكل: $F(s) = f_s \quad \forall s \in S$

وحيث: $f_s: S \to R$ معرّف بالشكل:

$$f_s(x) = \begin{cases} 1 & ; x = s \\ 0 & ; x \neq s \end{cases}$$

لدينا:

$$\forall \theta \in F, x \in S \Rightarrow \theta(x) = \theta(x).1$$

$$\sum_{s \in S} \theta(s).f_s(x) = \left(\sum_{s \in S} \theta(s).f_s\right)(x) \Rightarrow \theta = \sum_{s \in S} \theta(s).f_s$$

وهذا يعني أنّ الأسرة $\{F_s\}_{s \in S}$ تولد F

لنبيّن أنّ هذه الأسرة مستقلة خطياً: إذا كان:

$$\sum_{s \in S} \lambda_s.f_s = 0 \quad \forall \lambda_s \in R$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{s \in S} \lambda_s.f_s\right)(x) = 0 \quad \forall x \in S$$

$$\Rightarrow \sum_{s \in S} \lambda_s.f_s(x) = 0 \Rightarrow \lambda_x = 0 \quad \forall x \in S \Rightarrow \lambda_s = 0 \quad \forall s \in S$$

أي أنّ $\{f_s\}_{s \in S}$ مستقلة خطياً وبالتّالي $\{f_s\}_{s \in S}$ قاعدة لـ f أي أنّ:

F مودول حرّ يسمّى بالمودول الحرّ الموافق لـ S أو بالمودول الحر على S

نظرية: ليكن M مودول حرّ فوق حلقة واحدية R وليكن S مجموعة ما فإنّه يمكن كتابة كل تطبيق $g: S \to M$ بشكل وحيد كتركيب لتطبيقين نحصل على الخطط التبادلي الآتي:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & M \\ {\scriptstyle f}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle h} \\ & F & \end{array}$$

حيث h هو هومومورفيزم وحيد

البرهان:

ليكن F المودول الحر على S والمعرّف في الفقرة السّابقة. ولنعرّف التّطبيق $h: F \to M$ بالشكل: $\forall \theta \in F \quad h(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s).g(s)$ والتطبيق $f: S \to F$ بالشكل: $F(s) = f_s \quad \forall s \in S$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

• إنّ h معرّف جيّداً لأنّ:

$\forall \theta_1, \theta_2 \in F \; ; \; \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \theta_1(s) = \theta_2(s) \quad \forall s \in S$

$\Rightarrow \sum_{s \in S} \theta_1(s) . g(s) = \sum_{s \in S} \theta_2(s) . g(s) \Rightarrow h(\theta_1) = h(\theta_2)$

• إنّ F هومومورفيزم لأنّ:

1) $\forall \theta_1, \theta_2 \in F \Rightarrow h(\theta_1 + \theta_2) = \sum_{s \in S} (\theta_1 + \theta_2)(s) . g(s) =$

$\sum_{s \in S} (\theta_1(s) + \theta_2(s)) . g(s) = \sum_{s \in S} \theta_1(s) . g(s) + \sum_{s \in S} \theta_2(s) . g(s) =$

$h(\theta_1) + h(\theta_2)$

2) $\forall \theta \in F, \lambda \in R \Rightarrow h(\lambda\theta) = \sum_{s \in S} (\lambda\theta)(s) . g(s) =$

$\sum_{s \in S} \lambda . \theta(s) . g(s) = \lambda \left[\sum_{s \in S} \theta(s) . g(s) \right] = \lambda . h(\theta)$

• كما أنّ الشكل المعطى تبادلي لأنّ:

$\forall s \in S \Rightarrow (h \circ f)(s) = h(f(s)) = h(f_s) = \sum_{x \in S} f_s(x) . g(x) = g(s)$

$\Rightarrow h \circ f = g$

كما أنّ h وحيد لأنّه إذا كان $h' : f \to M$ هومومورفيزم آخر بحيث $h' \circ f = g$

فإنّه:

$\forall \theta \in F \Rightarrow h'(\theta) = h' \left(\sum_{s \in S} \theta(s) . f_s \right) =$

$\sum_{s \in S} \theta(s) . h'(F_s) = \sum_{s \in S} \theta(s) . h'(f(s)) = \sum_{s \in S} \theta(s) . (h' \circ f)(s) =$

$\sum_{s \in S} \theta(s) . g(s) = h(\theta)$

$\Leftarrow h = h'$ بالتالي h وحيد.

نظرية: إذا كان M مودول حرّ فوق حلقة واحدية R، ولتكن S قاعدة لـ M

فإنّ $M \cong F$ (المودول الحر على S):

البرهان:

من النظرية السابقة فإنّ المخطط الآتي تبادلي

حيث ζ الاحتواء القانوني

$S \xrightarrow{\zeta} M$

$f \searrow F \nearrow h$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبالتّالي: $z = h \circ f$ ويكون h هو موجورفيزم.

• إنّ h غامر لأنّه:

إنّ $Im\,h$ مودول جزئي من M ويحوي S لأنّه:

$\forall s \in S \Rightarrow S = z(s) = (h \circ f)(s) = h(f(s)) = h(f_s) \Rightarrow s \in Im\,h$

$\Rightarrow S \subseteq Im\,h \Rightarrow M \subseteq Im\,h$ (M لـ S قاعدة)

ومنه $M = Im\,h$ بالتالي h غامر.

• إنّ h متباين لأنّه:

$$\forall \theta \in \ker f \Rightarrow o = h(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s)\, z(s) = \sum_{s \in S} \theta(s)\, s$$

بما أنّ $\theta \in F$ فإنّ $\theta(s) = o$ من أجل جميع قيم s ما عدا عددٍ منتهٍ منها

ولتكن تلك القيم هي: $x_1, \ldots, x_n$ فإنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta(x_i)\, x_i = o$$

وبما أنّ S قاعدة فهي مستقلة خطياً وبالتّالي $\theta(x_i) = o$ ؛ $i = 1, \ldots, n$

أي أنّ $\theta = o$ وبالتالي $\ker h = \{o\}$ ومنه h متباين

ممّا سبق نجد أنّ h إيزومورفيزم ومنه $M \cong F$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة