كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تجمعات المودولات الجزئية:

لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) ، و M هو R - مودول ، ويكن N مودول جزئي من M . بالتعريف متمم المودول N في M هو مودول N' من M بحيث $M = N \oplus N'$.

نتيجة: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) و M هو R-مودول بما أنّ: $M = M \oplus \{0\}$ فإنّ كلّ من المودولين الجزئيين M و $\{0\}$ من M هو متمم للآخر في M.

مثال: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) ، و M هو R - مودول ، ويكن N و L مودولين جزئيين من M بحيث $L \subseteq N$. بيّن أنّه إذا كان للمودول L متمماً في M فإنّ للمودول الجزئي L متمماً في N.

الحل: بما أنّ للمودول L متمّماً في M ويكن L' ، فإنّ $M = L \oplus L'$ أي أنّ:

$M = L + L'$ & $L \cap L' = \{0\}$

لنضع $L'' = N \cap L'$ فإنّ L'' مودول جزئي من N ، ويكون:

$N \cap M = N$

$N \cap (L + L') = N \cap (L + L') = N$

$L + L'' = L + (N \cap L') = L + (N \cap L') = L + L' = M$

$L \cap L'' = L \cap (N \cap L') = N \cap (L \cap L') = N \cap \{0\} = \{0\}$

أي أنّ للمودول الجزئي L متمماً في N هو $N \cap L'$

المتتاليات التامة:

- يكون الخطط التالي: $A \xrightarrow{f} B$ تبادلي إذا كان: $g \circ f = h$

$h \searrow C \swarrow g$

• ويكون المخطط التالي: $A \xrightarrow{f} B$ تبادلي إذا كان $A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{q} D$ و $B \xrightarrow{g} D$ حيث $gof = qoh$

- بشكل عام نقول عن مخطط ما من مجموعات وتطبيقات أنه تبادلي إذا كان تركيب التطبيقات المنطلقة من نقطة واحدة والمستقرة إلى نقطة واحدة متساوية.

- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، إن متتالية من المودولات على R والهومومورفيزمات هي مخطط من الشكل: $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f} M_i \xrightarrow{g} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$

التعريف: لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية نقول عن متتاليتين من المودولات والهومومورفيزمات فوق R $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ إنها متتالية تامة إذا كان $Imf = kerg$.

• ونقول عن متتالية منتهية من المودولات والهومومورفيزمات $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ إنها متتالية تامة إذا وفقط إذا كانت كل متتالية $M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$ منها تامة أي إذا وفقط إذا كان: $\forall i = 0,1,\ldots,n-2 \quad Imf_i = kerf_{i+1}$

• ونقول عن متتالية غير منتهية من المودولات والهومومورفيزمات $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ إنها متتالية تامة إذا كان $\forall i \in \mathbb{Z} \quad Imf_{i-1} = kerf_i$

نظرية: لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية وليكن M و M' مودولين فوق R، وليكن $f: M \to M'$ هومومورفيزم عندئذٍ فإن:

1- تكون المتتالية $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ تامة إذا وفقط إذا كان f مونومورفيزم (أي متباين) ($0 \xrightarrow{F(0)=0} M$ الاقحام القانوني).

2- تكون المتتالية $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ تامة إذا وفقط إذا كان f (إبيمورفيزم) (غامر) ($M' \xrightarrow{F(x)=0} 0$ الهومومورفيزم الصفري).

3- تكون المتتالية $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ تامة إذا وفقط إذا كان f ايزومورفيزم (تقابل).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان:

1) تكون المتتالية $0 \to M \to M'$ تامة إذا وفقط إذا كان:

$\ker f = I(0 \to M) = \{0\}$ أي إذا وفقط إذا كان f متباين.

2) تكون المتتالية $M \xrightarrow{f} M' \to 0$ تامة إذا وفقط إذا كان:

$\mathrm{Im} f = \ker(M' \to 0) = M'$ أي إذا وفقط إذا كان f إيبومورفيزم

3) تكون المتتالية $0 \to M \xrightarrow{F} M' \to 0$ تامة إذا وفقط إذا كانت كلٌّ من المتتاليتين $0 \to M \xrightarrow{f} M'$ و $M \xrightarrow{F} M' \to 0$ تامتين

أي إذا وفقط إذا كان f إيبومورفيزم ومونومورفيزم أي إذا وفقط إذا كان f إيزومورفيزم.

نتائج: 1) إذا كان N مودول جزئي من المودول M فوق حلقة واحدية $(R,+,.)$ فإن المتتالية $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$ تامة حيث i التباين القانوني و π الغمر القانوني.

البرهان:

إن المتتالية $N \xrightarrow{i} M \to 0$ تامة لأن i متباين وكذلك فإن:

$N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N$ تامة لأن $\mathrm{Im} i = N$ و $\ker \pi = N$

بالتالي $\mathrm{Im} i = \ker \pi$

وأيضاً المتتالية $M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$ تامة لأن π غامر وبالتالي المتتالية المعطاة تامة.

2) ليكن M و M' مودولين فوق حلقة واحدية R، و $f: M \to M'$ R-هومومورفيزم. لتكن الصورة المرافقة لـ f ونرمز لها بـ $\mathrm{coim} f$ معرفة بالشكل $\mathrm{coim} f = M/\ker f$.

والنواة المرافقة لـ f ونرمز لها coker وتعرف بالشكل: $\mathrm{coker} = M'/\mathrm{Im} f$.

فإن المتتاليات الآتية تامة:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$0 \to \ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker} \to 0$

$0 \to \ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \operatorname{coim} f \to 0'$

$0 \to \operatorname{Im} f \xrightarrow{i} M' \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker} f \to 0'$

حيث i التباين القانوني و π الغمر القانوني.

البرهان:

إن المتتالية الأولى تامة لأن المتتالية $0 \to \ker f \xrightarrow{i} M$ تامة لأن i تباين، والمتتالية $\ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M'$ تامة لأن $\operatorname{Im} i = \ker f$ والمتتالية: $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}$ تامة لأن $\operatorname{Im} f = \ker \pi$ والمتتالية $M' \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker} \to 0$ تامة لأن π غامر.

ملاحظة: تركيب هومومورفيزمين متتاليين في متتالية تامة من المودولات و الهومومورفيزمات هو الهومومورفيزم الصفري.

البرهان: لتكن $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ متتالية تامة فإن $\operatorname{Im} f = \ker g$ ومنه:

$$\forall x \in M_1 \Rightarrow F(x) = F(M_1) \Rightarrow f(x) \in \ker g \Rightarrow g(f(x)) = 0$$
$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow g \circ f = 0$$

تمرين: لتكن V_1, V_2 فضائين شعاعيين فوق حقل K. بيّن أن المتتالية $0 \to V_1 \xrightarrow{i} V_1 \times V_2 \xrightarrow{p} V_2 \to 0$ تامة حيث: $i: V_1 \to V_1 \times V_2$ التباين القانوني $x_1 \to (x_1, 0)$ الإسقاط القانوني $\left(p: V_1 \times V_2 \to V_2 \;;\; (x_1, x_2) \to x_2\right)$

الحل: المتتالية $0 \to V_1 \xrightarrow{i} V_1 \times V_2 \xrightarrow{p} V_2$ تامة لأن $\operatorname{Im} i = V_1 \times \{0\}$ و $\ker p = V_1 \times \{0\}$ ومنه $\operatorname{Im} i = \ker f$ والمتتالية $V_1 \times V_2 \xrightarrow{p} V_2 \to 0$ تامة لأن p غامر، ومنه فإن المتتالية المطلوبة تامة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

• نظرية التماهيات الأربعة:

لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية ونفرض أنّ الخطط التالي عن المودولات فوق R

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{F} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow & & t\downarrow \\ A' & \xrightarrow[F']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' & \xrightarrow[h']{} & D' \end{array}$$

والبومومورفيزمات بتبادلي

وأنّ السطرين حساليين تاميين

1- إذا كان p و r ايبومورفيزمين وكان t مونومورفيزم فإنّ q ايبومورفيزم

2- إذا كان q و t مونومورفيزم وكان p ايبومورفيزم فإنّ r مونومورفيزم

البرهان:

$\forall c \in \ker r \Rightarrow r(c)=0 \Rightarrow h'(r(c))=0 \Rightarrow (h\circ r)(c)=0$ [2]

$\Rightarrow (t\circ h)(c)=0 \Rightarrow t(h(c))=0 \Rightarrow h(c) \in \ker t$

وبما أنّ t متباين فإنّ $\ker t=\{0\}$ ومنه:

$h(c)=0 \Rightarrow c \in \ker h = \operatorname{Im} g \Rightarrow \exists b \in B$; $\boxed{c=g(b)}$

ولكن $r(c)=0$

$\Rightarrow r(g(b))=0 \Rightarrow (r\circ g)(b)=0 \Rightarrow (g'\circ q)(b)=0 \Rightarrow g'(q(b))=0$

$q(b) \in \ker g' = \operatorname{Im} f' \Rightarrow \exists a' \in A$; $q(b)=f'(a')$

وبما أنّ f غامر فإنّه يوجد $a \in A$ بحيث $a' \in p(a)$

$q(b)=f'(p(a))=(F'\circ p)(a)=g(q\circ f)(a)=q(f(a))$

$q(b)-q(f(a))=q(b-f(a))=0 \Rightarrow b-f(a) \in \ker q$

وبما أنّ q متباين فإنّ $\ker q=0$

ومنه: $b-f(a)=0 \Rightarrow b=f(a)$

$\Rightarrow g(b)=g(f(a))=(g\circ f)(a)=0$

$\Rightarrow c=g(b)=0 \Rightarrow \ker r=\{0\}$

ومنه r متباين أي r مونومورفيزم.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية التماثلات الخمسة:

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ونفرض أن الخط الآتي من الموجولات فوق R وأيزومورفيزمات تبادلي:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{F} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{t} & E \\ \downarrow q_1 & & \downarrow q_2 & & \downarrow q_3 & & \downarrow q_4 & & \downarrow q_5 \\ A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' & \xrightarrow[h']{} & D' & \xrightarrow[t']{} & E' \end{array}$$

وأن سطريه متتاليتين تاميتين.

فإذا كانت q_1 و q_2 و q_4 و q_5 ايزومورفيزمات فإن q_3 ايزومورفيزم.

البرهان:

بأخذ المربعات الثلاثة اليمينية ومنه [1] من النظرية السابقة فإن q_3 يكون ايبومورفيزم وبأخذ المربعات الثلاثة اليسارية ومنه [2] من النظرية السابقة فإن q_3 يكون مونومورفيزم وبالتالي q_3 يكون ايزومورفيزم

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z