كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

الارتباط والاستقلال الخطي:

لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، و M هو R - مودول، ولتكن $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ مجموعة جزئية من عناصر M، نسمي تركيب خطي لعناصر S كل عنصر x من M يكتب بالشكل: $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \quad ; \lambda_i \in R$

واذا كانت $S=\{x_i\}_{i\in I}$ مجموعة جزئية من M (منتهية أو غير منتهية) فإن تركيباً خطياً لعناصر S هو عنصر x من M يكتب بالشكل: $x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i \quad ,\lambda_i\in R$ وجميع عناصر λ_i أصفاراً ماعدا عدد منتهٍ منها

تعريف: لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، و M هو R - مودول، ولتكن $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ مجموعة جزئية منتهية من عناصر M.

- نقول عن S أنها مرتبطة خطياً فوق R إذا أمكن ايجاد عناصر $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ من R ليست كلها أصفار وبحيث يكون: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$
- واذا لم تكن S مرتبطة خطياً فإننا نقول أن S مستقلة خطياً فوق R أي أن S تكون مستقلة خطياً إذا تحقق الشرط:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0 \quad ; \lambda_i\in R \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0$$

ملاحظة: إذا كانت S مجموعة جزئية ما (منتهية أو غير منتهية) من المودول M فوق الحلقة الواحدية R، فإن S تكون مرتبطة خطياً إذا وجد على الأقل مجموعة جزئية غير خالية منتهية من S مرتبطة خطياً.

ونقول عن S أنها مستقلة خطياً إذا كانت كل مجموعة جزئية منتهية منها مستقلة خطياً أي إذا كان من أجل كل عدد منتهٍ $x_1,\dots,x_n$ من عناصر S يتحقق

الشرط: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \quad ; \quad \lambda_i \in R \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

أمثلة: 1) لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية.

نعلم أنّ R^4 هو R - مودول بالنّسبة لعمليتي جمع المركبات وضرب المركبات بكميّة سلمية. بيّن أنّ المجموعة الجزئية من R^4 التالية:

$S = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

مستقلة خطياً فوق R

- لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ عناصر من R بحيث

$\lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(0,1,0,0) + \lambda_3(0,0,1,0) + \lambda_4(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

أي أنّ S مستقلة خطياً.

2) لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية، و M هو R - مودول. بيّن أنّه إذا كانت S مجموعة جزئية من M بحيث $0 \in S$ فإنّ S مرتبطة خطياً.

الحل: لتكن $S_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة جزئية منتهية من S بحيث العنصر هو أحد عناصرها. ولتكن مثلاً x_1 عندئذٍ:

$1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$

والأمثال ليست كلّها أصفار حيث $\lambda_1 = 1 \neq 0$ أي أنّ S_1 مرتبطة خطياً، وبالتّالي S مرتبطة خطياً.

المودولات الحرة:

تعريف: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية، و M هو R - مودول ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من M. نسمّي S قاعدة لـ M فوق R إذا كان:

1- $M = \langle S \rangle$، أي أنّ S تولد M

2- S مستقلة خطياً فوق R

ملاحظة: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية وليكن M هو R - مودول. إذا كانت S قاعدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لـ M مولدة كل عنصر من M يكتب بصورة وحيدة لعناصر S.

البرهان: ليكن x عنصرا من M

بما أن S قاعدة لـ M فهي مولدة لـ M، بالتالي فإن:

$x_i \in S$ و $\lambda_i \in R$ ؛ $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ لنفرض أن x يكتب بطريقة

أخرى أي أن: $x_i \in S$ ، $\mu_i \in R$ ؛ $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

وعنه $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$

$\forall i = 1, \dots, n$ $\lambda_i - \mu_i = 0$ $\Rightarrow$ لأن S مستقلة خطياً

$\forall i = 1, \dots, n$ $\lambda_i = \mu_i$

وبالتالي x يكتب بصورة وحيدة.

تعريف: ليكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدية و M هي R - مودول.

نسمي M مودول حرّ إذا كان يوجد لـ M قاعدة فوق R أو إذا كان M هو المودول الصفري.

تمارين 1.1 - ليكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدية، و M و N مودولين فوق R، وليكن $\{x_1, \dots, x_n\}$ و $\{y_1, \dots, y_n\}$ قاعدتين لـ M و N على الترتيب. بيّن أنه يوجد R - ايزومورفيزم وحيد للمودول M في المودول N، ومن أجله $f(x_i) = y_i$ حيث $i = 1, \dots, n$

الحل: بما أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة لـ M فإن كل عنصر x من M يكتب بصورة وحيدة بالشكل: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ ؛ $\lambda_i \in R$

ولنعرّف التطبيق $f: M \to N$ بالشكل: $f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$

لنبيّن أن f معرّف جيداً لأنه:

$\forall x, y \in M$ ؛ $x_1 = x_2$ ، $x_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ ؛ $x_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

- إذن f هو مونومورفيزم لأنّ:

1) $\forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow x_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; , \; x_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

$$f(x_1 + x_2) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) y_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i = f(x_1) + f(x_2)$$

2) $\forall \lambda \in R \; , \; x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

$$f(\lambda x) = f\left(\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) y_i$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \lambda f(x)$$

- إنّ F متباين لأنّه:

$$\forall x_1, x_2 \in M \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \; \text{و} \; x_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; , \; x_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i$$

$\Longrightarrow^{y_1, \dots, y_n \text{ قاعدة}} \lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \Rightarrow x_1 = x_2$$

- إنّ F غامر لأنّه:

$$\forall y \in N \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \; ; \; \lambda_i \in R$$

$$\exists x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in M \; ; \; f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = y$$

حسب مبرهنة أنّ f من R إلى R هو مونومورفيزم وهو وحيد لأنّ:

إذا كان $g: M \to N$ هو R إلى R مونومورفيزم بحيث $\forall i = 1, \dots, n \; ; \; g(x_i) = y_i$

فإنّ:

$$\forall x \in M \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in R$$

$$\Rightarrow g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = f(x) \Rightarrow$$

$$f = g$$

2. لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، و M و M' مودولين فوق R، ولتكن $f:M\to M'$ ايبومورفيزم. R ولتكن $\{x_1',\dots,x_n'\}$ قاعدة لـ M' ولتكن $f:M\to M'$ ايبومورفيزم. بيّن أنّه يوجد مودول جزئي N من M بحيث يكون $M=N+\ker f$.

الحل:

بما أنّ التطبيق $f:M\to M'$ غامر، فإنّه من أجل العناصر $x_1',\dots,x_n'$ توجد عناصر $x_1,\dots,x_n$ من M بحيث تكون $f(x_i)=x_i'\quad\forall i=1,\dots,n$

وليكن N هو المودول الجزئي من M والمولد بالعناصر $\{x_1,\dots,x_n\}$

إنّ $\{x_1,\dots,x_n\}$ مستقلة خطياً لأنّه إذا كانت:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0\ ;\ \lambda_i\in R\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f(0)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)=0'\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i'=0'\xrightarrow{\{x_1',\dots,x_n'\}\text{ مستقلة خطياً}}\lambda_i=0\quad\forall i=1,\dots,n$$

أي أنّ $\{x_1,\dots,x_n\}$ مولدة لـ N، مستقلة خطياً، بالتالي فهي قاعدة لـ N ومنه N مودول حرّ من M.

إنّ: $N+\ker f\subseteq M$ ولدينا:

$$\forall x\in M\Rightarrow f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i'\ ;\ \lambda_i\in R\Rightarrow$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\Rightarrow f\left(x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=0'$$

$$\Rightarrow x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in\ker f\Rightarrow x\in N+\ker f\Rightarrow M\subseteq N+\ker f$$

ومنه $M=N+\ker f$

كما أنّ:

$$\forall y\in N\cap\ker f\Rightarrow y\in N\ \&\ y\in\ker f$$

$$\Rightarrow y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\ ;\ \lambda_i\in R\ \&\ f(y)=0'$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=0'\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)=0'\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i'=0'$$

$$\Rightarrow\lambda_i=0\quad\forall i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow y=\sum_{i=1}^{n}0.x_i=0\Rightarrow N\cap\ker f=\{0\}\Rightarrow M=N\oplus\ker f$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، و M هو R ـ موديول. إذا كانت S قاعدة لـ M فإنّ S هي المجموعة الأصغرية المولدة لـ M وهي المجموعة الأعظمية المستقلة خطياً في M.

• الموديولات النيوثرية والأرتينيّة:

تعريف: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) و M هو R ـ موديول. نقول إنّ M يحقّق شرط انقطاع السلاسل التزايدية إذا تحقق الشرط:

من أجل كل سلسلة تزايدية من الموديولات الجزئية من M: $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$

يوجد عدد صحيح موجب n من أجله $M_i = M_n$ حيث $i = n+1, n+2, \dots$

أي أنّ كل سلسلة تزايدية من الموديولات الجزئية من M تتساوى ابتداءً من حدّ معين.

إذا كان الموديول M يحقّق شرط انقطاع السلاسل التزايدية فإننّا نسمي M نيوثرياً.

تعريف: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) و M هو R ـ موديول. نقول إنّ M يحقّق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة إذا تحقق الشرط:

من أجل كل سلسلة متناقصة من الموديولات الجزئية من M: $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$

يوجد عدد صحيح موجب n من أجله $M_i = M_n$ حيث $i = n+1, n+2, \dots$

أي أنّ كل سلسلة متناقصة من الموديولات الجزئية من M تتساوى ابتداءً من حدّ معين.

إذا كان الموديول M يحقّق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة فإننّا نسمي M أرتينياً.

نظرية: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M هو R ـ موديول، وليكن N موديول جزئي من M، فإنّ M يكون نيوثرياً (أرتينياً) إذا وفقط إذا كان كلٌّ من N و M/N نيوثرياً (أرتينياً).

تمرين: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M هو R ـ موديول وليكن M_1 و M_2 موديولين جزئيين من M بحيث أنّ M_1 و M_2 نيوثريين وبحيث أنّ $M = M_1 + M_2$.

برهن أنّ M نيوثري؟

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

بما أنّ M_2 نبوثري و $M_1 \cap M_2$ مودول جزئي منه، فإنّه حسب النظرية السابقة فإنّ: $M_2 / M_1 \cap M_2$ نبوثري، ولدينا:

$$M / M_1 = M_1 + M_2 / M_1$$

$$\cong M_2 / M_1 \cap M_2$$

وبما أنّ $M_2 / M_1 \cap M_2$ نبوثري فإنّ M / M_1 نبوثري وكذلك بما أنّ M_1 نبوثري فحسب النظرية السابقة M نبوثري.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة