كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تتمة البرهان من المحاضرة السابقة

• إثبات f متباينة لأن:

$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i \;,\; y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in M$

$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x_1 + \dots + x_n) = f(y_1 + \dots + y_n)$

$\Rightarrow f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) = f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n)$

$\Rightarrow f_i(x_i) = f_i(y_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow x = y$ f ابزومورفيزم

• إثبات f غامرة لأن:

$\forall y \in N \Rightarrow y = y_1 + y_2 + \dots + y_n \;;\; y_i \in N \quad i = 1, \dots, n$

f_i غامر $\Rightarrow \exists x_i \in M_i \;;\; f(x_i) = y_i \;;\; i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \exists x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in M \;;\; f(x) = f(x_1 + \dots + x_n)$

$= f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$

$= y_1 + \dots + y_n = y$

بما سبق نجد أن f ابزومورفيزم ومنه $M \cong N$

3. لتكن $(R, +, .)$ حلقة (واحدية) و M هو R ـ مودول، ولتكن $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من M بحيث $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ولتكن $N_1, \dots, N_n$ مودولات جزئية من $M_1, \dots, M_n$ على الترتيب ولتكن $N = N_1 + \dots + N_n$ والمطلوب

أ- بيّن أن المجموع $N = N_1 + \dots + N_n$ هو مجموع مباشر

ب- إذا كان $f : M \to M/N$ معرفة بالشكل:

$\forall x \in M \quad f(x) = x + N$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

فإنّ f هو R ـ ايزومورفيزم. بيّن أنّ $M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$ ؟

الحل: أ) لدينا $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$ ولنبرهن أنّ $N_1, \dots, N_n$ مستقلة إذا كان:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ و $x_i \in N_i$ و $i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow x_i \in M_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow N_1, \dots, N_n$ مستقلة

إذاً $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$

ب) لدينا $\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \subseteq M/N$ كما أنّه

$\forall x + N \in M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ و $x_i \in M_i$

$\Rightarrow x + N = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + N = \sum_{i=1}^{n} (x_i + N) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \in \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$

$\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$

ومنه $M/N = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$

إذا كانت $N = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)$ حيث $z_i \in M_i$

$\sum_{i=1}^{n} (z_i + N) = N \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) + N = N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i \in N$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$ و $x_i \in N_i \Rightarrow x_i \in M_i$ و $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow z_i = x_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f(z_i) = f(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

$f(z_i) = x_i + N = N \quad \forall i = 1, \dots, n$

بالتالي $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة ومنه $M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$

مبرهنة: ليكن M مودولاً فوق حلقة (واحدية) R، ولتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة عناصر غير خالية من المودولات الجزئية من M. إنّ الشّرط اللازم والكافي كي يكون المودول M هو مجموع مباشر داخلي للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ هو أن يكون بالإمكان كتابة كل عنصر x من M بصورة وحيدة بالشكل: $x = \sum_{i \in I} x_i$ حيث أنّ x_i عنصر ($i \in I$) من M_i، وحيث أنّ جميع العناصر x_i أصغاراً ما عدا عددٍ منتهٍ منها.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

• الجداء المباشر والمجموع المباشر الخارجي

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة (واحدية) ، ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من المودولات فوق R ، ولنأخذ $\prod_{i\in I} M_i$ (الجداء الديكارتي)

• إنّ $\prod_{i\in I} M_i$ هو R - مودول بالنسبة للعمليتين الداخلية $(+)$: حيث

$$(x_1,\dots,x_n,\dots)+(y_1,\dots,y_n,\dots)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n,\dots)$$

والخارجية العملية $(\cdot)$ حيث :

$$\lambda(x_1,\dots,x_n,\dots)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n,\dots)$$

وذلك $\forall x_i,y_i\in M \quad \lambda\in R \quad i\in I$

نسمي $\prod_{i\in I} M_i$ الجداء المباشر لأسرة المودولات $\{M_i\}_{i\in I}$

تعريف : لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة (واحدية) ، ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من المودولات فوق الحلقة R ولتكن

$$M=\left\{(m_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}M_i \;;\; m_i \text{ أصفاراً ما عدا عدد منتهٍ منها } (i\in I)\right\}$$

• يمكن البرهان بسهولة أنّ M هو مودول جزئي من الجداء $\prod_{i\in I} M_i$ نسمي M المجموع المباشر الخارجي للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ ويرمز له بـ $\bigoplus_{i\in I} M_i$

ملاحظات :

1. إذا كانت $M_1,\dots,M_n$ أسرة منتهية من المودولات فوق حلقة (واحدية) ، عندئذٍ فإنّه يتطابق المجموع المباشر الخارجي مع المجموع المباشر الداخلي ونكتب

$$\hat{\prod_{i=1}} M_i = M_1\times\dots\times M_n = M_1\oplus\dots\oplus M_n = \hat{\bigoplus_{i=1}} M_i$$

وذلك لأنّه في هذه الحالة يكون :

$M_1\times\dots\times M_n = \hat{\bigoplus_{i=1}} M_i$ وسوف ندعو في هذه الحالة المجموع المباشر الداخلي والمجموع المباشر الخارجي بالمجموع المباشر .

2. إنّ الجداء المباشر والمجموع المباشر لمودولات عددها غير منتهٍ مختلفان في الحالة العامة .

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من المودولات فوق حلقة (واحدية) فإنّه من أجل كل j من I يكون التطبيق $in_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ المعرّف بالشكل:

$$in_j(x) = (x_i)_{i\in I} \quad ; \quad \begin{cases} x_i = 0_{M_i} & \forall\ i \neq j \\ x_i = x & ; \quad i = j \end{cases}$$

هو R ـ مونومورفيزم ـ مودولات ، ويسمّى تطبيق التباين القانوني.

تعريف: ليكن M مودولاً فوق حلقة (واحدية) R ، ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من المودولات الجزئية من M

عندئذٍ من أجل كل i من I يكون التطبيق $Z_i : M_i \to M$ المعرف بالشكل:

$$Z_i(x_i) = x_i \qquad \forall\ x_i \in M_i$$

هو R ـ مونومورفيزم مودولات ، ويسمى تطبيق الاحتواء القانوني الـ M_i في M

والتطبيق $\pi_k : \prod_{i\in I} M_i \to M_k$ المعرف بالشكل:

$$\pi_k\left((x_i)_{i\in I}\right) = x_k \qquad \forall\ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$$

هو R ـ ابيمورفيزم ويسمى الاسقاط القانوني.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z