كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

نظرية (2): ليكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M و R - موديول وليكن N_1 و N_2 موديولين جزئيين من M بحيث $N_1 \subseteq N_2$ عندئذٍ فإنّ $M/N_2 \cong (M/N_1)/(N_2/N_1)$.

نظرية (3): ليكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M هو R - موديول، وليكن N_1 و N_2 موديولين جزئيين من M عندئذٍ فإنّ: $(N_1+N_2)/N_1 \cong N_2/(N_1 \cap N_2)$

المجموعات المولدة لموديول:

تعريف: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M هو R - موديول، ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من M. إنّ تقاطع كل الموديولات الجزئية من M والتي تحوي S هو موديول جزئي من M يحوي S، يسمّى بالموديول الجزئي من M المولد بالمجموعة S، ويرمز له بـ $\langle S \rangle$، وهو أصغر موديول جزئي من M يحوي S.

- إذا كانت S مجموعة منتهية، فإننا نقول عن الموديول الجزئي $\langle S \rangle$ إنّه منتهي التوليد.
- إذا كانت S مؤلفة من عنصر واحد $S=\{x\}$ فإننا نرمز بـ $\langle x \rangle$ للموديول الجزئي من M المولد بالعنصر x.

ملاحظات: 1) إذا كانت $(R,+,.)$ حلقة ما، و M هو R - موديول، و S مجموعة جزئية غير خالية من M، فإنّه يبرهن أنّ مجموعة كل التراكيب من الشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \sum_{j=1}^{m} n_j x_j \qquad x_i, x_j \in S \quad r_i \in R \quad n_j \in \mathbb{Z} \quad n,m \in \mathbb{Z}^+$$

تكون موديول جزئي من M يحوي S، وهو أصغر موديول جزئي من M يحوي S. وبالتالي من التعريف السابق نجد أنّ هذا الموديول الجزئي المؤلف من التراكيب السابقة هو نفسه الموديول الجزئي من M المولد بـ S.

- إذا كانت S مؤلفة من عنصر واحد $S=\{x\}$ فإنّ الموديول الجزئي من M المولد بالعنصر

x هو المجموعة: $\langle x \rangle = \{ rx + nx \; ; \; r \in R \; , \; n \in \mathbb{Z}_+ \}$

ج/ - إذا كانت الحلقة $(R, +, .)$ حلقة واحدية، و M هو R - مودول، و S مجموعة جزئية غير خالية من M، فإن المودول الجزئي المولد بـ S هو:

$$\langle S \rangle = \{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \; ; \; x_i \in S \; , \; r_i \in R \; , \; n \in \mathbb{Z}^+ \}$$

- وإذا كانت S مؤلفة من عنصر واحد $S = \{x\}$ فإن:

$$\langle x \rangle = \{ rx \; ; \; r \in R \}$$

أمثلة: 1) - لتكن $(R, +, .)$ حلقة واحدية نعلم أن R^2 يكون R - مودول، بالنسبة للعمليتين الداخلية $(+)$ والخارجية $(.)$:

- $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1 \; , \; a_2 + b_2)$
- $\alpha (a_1, a_2) = (\alpha a_1 \; , \; \alpha a_2)$

وذلك أياً كان $\alpha \in R$ و $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in R^2$ فإن المجموعة $S = \{ (1,0) \; , \; (0,1) \}$ مولّدة لـ R^2 وذلك لأن:

$$\forall (a_1, a_2) \in R^2 \Rightarrow (a_1, a_2) = a_1 (1,0) + a_2 (0,1)$$

ج/ لتكن R حلقة واحدية، و M هو R - مودول، ولتكن $S = \{ x_1, \dots x_n \} ; n \in \mathbb{Z}$ مجموعة جزئية منتهية من M بحيث أن $M = \langle S \rangle$.

- يبيّن أن المجموعة $S \setminus \{x_k\}$ مولّدة لـ M حيث $x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \lambda_i x_i$ $\quad \lambda_i \in R$ & $k \in \{1, \dots, n\}$

الحل:

$$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \; ; \; r_i \in R$$

$$= r_k x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i = r_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i) x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i \Rightarrow x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i + r_i) x_i$$

بالتالي:

فإن العنصر x كُتب كتركيب خطي لعناصر $S \setminus \{x_k\}$ وعليه $S \setminus \{x_k\}$ مولّدة لـ M

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الجداء والمجموع المباشر:

تعريف لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، ولتكن M هي R - مودول، ولتكن $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من M. نقول إنّ M مجموع مباشر لـ $M_1, \dots, M_n$ ونكتب:

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

إذا كان كل عنصر x من M يكتب بصورة وحيدة بالشكل:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad x_i \in M_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

تعريف: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M هو R مودول، و $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من M. نقول إنّ هذه المودولات الجزئية مستقلة إذا كان:

$$M_k \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} M_i\right) = \{0\} \qquad k = 1, \dots, n$$

- يبرهن بسهولة أنّ المودولات $M_1, \dots, M_n$ مستقلة إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad ; \quad x_i \in M_i \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

نظرية: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M هو R - مودول، و $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من M. الشرط اللازم والكافي لكي يكون $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ هو:

1) أن يتحقق الشرطان: $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ (M مجموع لـ $M_1, \dots, M_n$)

2) $M_k \cap \left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right) = \{0\}$; $k = 1, \dots, n$

أي أنّ $M_1, \dots, M_n$ مستقلة.

أمثلة: 1) لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M هو R - مودول، وليكن N_1 و N_2 مودولين جزئيين من M بحيث أنّ $M = N_1 \oplus N_2$. بيّن أنّ: $M/N_1 \cong N_2$

الحل: لنعرّف التطبيق $f : N_2 \to M/N_1$ بالشكل: $f(x) = x + N_1$; $x \in N_2$

إنّ f معرّف جيداً لأنّ:

$$\forall x_1, x_2 \in N_2 \quad ; \quad x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

إنّ f هومومورفيزم لأنّ:

1) $\forall x_1, x_2 \in N_2 \Rightarrow f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + N_1 =$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(x_1 + N_1) + (x_2 + N_2) = f(x_1) + f(x_2)$

إذ $\forall \lambda \in R$, $x \in N_2 \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda x + N_1 = \lambda(x + N_1) = \lambda f(x)$

إذن F متباين لأن:

$\forall x_1, x_2 \in N_2$; $f(x_1) = f(x_2)$ $\quad x_1 + N_1 = x_2 + N_1 \Rightarrow x_1 + x_2 \in N_1$

وبما أن $x_1, x_2 \in N_2$ فإن $x_1 - x_2 \in N_2$ ومنه: $x_1 - x_2 \in N_1 \cap N_2 = \{0\}$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

إذن f غامر لأن:

$\forall y \in M/N_1 \Rightarrow \exists x = x_1 + x_2 \in M$; $y = x + N_1 = (x_1 + x_2) + N_1$;

$x_1 \in N_1$ & $x_2 \in N_2$

$\Rightarrow \exists x_2 \in N_2$; $y = (x_1 + x_2) + N_1$

$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1)$

$= N_1 + (x_2 + N_1) = x_2 + N_1 = f(x_2)$

2- لتكن $(R, +, .)$ حلقة (واحدية) و M و N موديولين فوق R ، ولتكن $M_1, \dots, M_n$ موديولات جزئية من M بحيث $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ ولتكن $N_1, \dots, N_n$ موديولات جزئية من N بحيث $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$ بيّن أنه إذا كان $M_i \cong N_i$ $(i = 1, \dots, n)$ فإن $M \cong N$

الحل: من فرض كون $M_i \cong N_i$ فإنه يوجد $f_i : M_i \to N_i$ $(i = 1, \dots, n)$ أيزومورفيزم، على الأقل، كما أن كل x عنصر من M يكتب بصورة وحيدة بالشكل:

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i$; $x_i \in M_i$; $i = 1, \dots, n$

لنعرّف التطبيق $f : M \to N$ بالشكل:

$f(x_1 + \dots + x_n) = \underbrace{f_1(x_1)}_{\in N_1} + \dots + \underbrace{f_n(x_n)}_{\in N_2}$ $\quad \forall x_i \in M_i$ $\quad i = 1, \dots, n$

إذن f معرّف جيداً لأنه:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i \;,\; y = \sum_{i=1}^{n} y_i \;,\; \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \;;\; x_i \in M_i$

$y_i \in M_i \quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow x_i = y_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f_i(x_i) = f_i(y_i) \quad ; \quad i = 1, \dots, n$

$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) = f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n)$

$\Rightarrow f(x_1 + \dots + x_n) = f(y_1 + \dots + y_n)$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$

f هومومورفيزم لأنه:

1) $\forall x = x_1 + \dots + x_n \;,\; y = y_1 + \dots + y_n \in M$

$\Rightarrow f(x+y) = f\left((x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n)\right)$

$= f\left((x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n)\right)$

$= f_1(x_1 + y_1) + \dots + f_n(x_n + y_n)$

$= f_1(x_1) + f_1(y_1) + \dots + f_n(x_n) + f_n(y_n)$

$= f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) + f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n)$

$= f(x_1 + \dots + x_n) + f(y_1 + \dots + y_n)$

$= f(x) + f(y)$

2) $\forall \lambda \in R \quad x = x_1 + \dots + x_n \in M$

$\Rightarrow f(\lambda x) = f\left(\lambda (x_1 + \dots + x_n)\right) = f(\lambda x_1 + \dots + \lambda x_n) =$

$f_1(\lambda x_1) + \dots + f_n(\lambda x_n)$

$= \lambda f_1(x_1) + \dots + \lambda f_n(x_n)$

$= \lambda \left[f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \right]$

$= \lambda f(x_1 + \dots + x_n) = \lambda f(x)$

انتهت الحلقة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة