كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الهومومورفيزمات:

تعريف: لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية ولتكن M و M' مودولين فوق R وليكن $f: M \to M'$ تطبيقاً للمودول M في المودول M' نسمي F هومومورفيزم مودولات أو R - هومومورفيزم إذا تحقق:

1) $F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \forall x,y \in M$

2) $F(\lambda x) = \lambda \cdot F(x) \quad \forall x \in M \ \& \ \lambda \in R$

- إذا كان R حقلاً فإننا نسمي الهومومورفيزم بين الفضائين الشعاعين تطبيق خطي.
- إذا كان F هو R - هومومورفيزم متباين فإننا نسميه R - مونومورفيزم.
- إذا كان F هو R - هومومورفيزم غامر فإننا نسميه R - ابيمورفيزم.
- إذا كان F هو R - هومومورفيزم تقابل (غامر ومتباين) فإننا نسميه R - ايزومورفيزم.
- لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) وليكن M و M' مودولين فوق R فإننا نقول عن المودولين M و M' إنهما ايزومورفيان ونرمز لذلك $M \cong M'$
- إذا أمكن ايجاد R - ايزومورفيزم على الدمثل لكل منهما إلى الآخر.
- ليكن M هو R - مودول فوق الحلقة (الواحدية) R إذا كان $f: M \to M$ R - هومومورفيزم للمودول M على نفسه فإننا نسمي F هو R - اندومورفيزم وإذا كان $f: M \to M$ R - ايزومورفيزم فإننا نسمي F R - أوتومورفيزم للمودول M.

ملاحظة (1): لتكن R حلقة (واحدية) و M هو R - موديل و N مودول جزئي من M فإن التطبيق: $\pi: M \to M/N$ المعرف بالشكل: $\forall x \in M \quad \pi(x) = x + N$ يكون ابيمورفيزم (أي هومومورفيزم غامر) ويسمى هو مومورفيزم الغمر القانوني.

• نواة وصورة هومومورفيزم :

ليكن $(R,+,\cdot)$ حلقة (واحدية) وليكن M و M' مودولين فوق R وليكن $f: M \to M'$ هو R ـ هو هومومورفيزم بالتعريف نواة F هي المجموعة :

$$\ker f = \{ x \in M \mid f(x) = o' \} = f^{-1}(\{o'\})$$

وبالتعريف صورة F هي المجموعة $\mathrm{Im} F = F(M) = \{ y \in M' \mid \exists x \in M , f(x) = y \}$

خواص : لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية ، وليكن M و M' مودولين فوق R وليرمز o و o' لصفري M و M' على الترتيب وليكن $F: M \to M'$ هو R ـ هومومورفيزم عندئذٍ

فإن : 1) $F(o) = o'$

2) $F(-x) = -F(x)$

3) $F(x-y) = F(x) - F(y)$

4) $F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

$\forall \lambda_1, \dots \lambda_n \in R \qquad x_1, \dots x_n \in M$

5) إذا كان N مودول جزئي من M فإن $F(N)$ مودول جزئي من M'

6) إذا كان N' مودول جزئي من M' فإن $F^{-1}(N')$ هو مودول جزئي من M

7) $\ker f$ مودول جزئي من M

8) الشرط اللازم والكافي لكي يكون الهومومورفيزم F هو R ـ مونومورفيزم هو أن يكون $\ker f = o$

البرهان : 5) أ) واضح أن $\emptyset \neq F(N) \subseteq M'$ لأن $F(o) = o'$ و $o' \in F(N)$

ب) $\forall y_1, y_2 \in F(N) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in N ; \ y_1 = f(x_1) \ \& \ y_2 = f(x_2)$

$y_1 - y_2 = F(x_1) - F(x_2) = F(x_1 - x_2) \in F(N)$

ج) $\forall y \in F(N) , \lambda \in R \Rightarrow \exists x \in N ; \ y = f(x)$

$\Rightarrow \lambda y = \lambda \cdot f(x) = f(\lambda \cdot x) \in F(N)$

مما سبق نجد أن $F(N)$ هو مودول جزئي من M'

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ويبرهن على أنّه إذا كانت R حلقة واحدية تبديلية فإنّ $\underset{R}{HOM}(M,N)$ يكون

مودول فوق R

ملاحظة: لتكن M و N و p ثلاث مودولات فوق حلقة واحدية R ولتكن:

$f \in Hom(M,N)$ و $g \in Hom(N,p)$ فإنّ:

1) $gof \in \underset{R}{Hom}(M,p)$ أي أنّ تركيب هوجومورفيزمين هو هوجومورفيزم

2) إذا كان f و g ايبومورفيزم فإنّ gof يكون ايبومورفيزم

3) إذا كان f و g مونومورفيزم فإنّ gof يكون مونومورفيزم

4) إذا كانَ f و g ايزومورفيزم فإنّ gof يكون ايزومورفيزم

ملاحظة: ليكن M و N مودولين فوق حلقة واحدية R وليكن $f: M \to N$ - R

هوموجورفيزم فإنّ:

1) إذا كانَ M_1 مودول جزئي من M فإنّ $F^{-1}(F(M_1)) = M_1 + \ker f$

2) إذا كانَ N_1 مودول جزئي من N فإنّ $f(f^{-1}(N_1)) = N_1 \cap Im f$

البرهان: 1)

$\forall x \in F^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow$

$\exists x_1 \in M_1 \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x - x_1) = 0' \Rightarrow x - x_1 \in \ker f$

$\Rightarrow x \in M_1 + \ker f \Rightarrow F^{-1}(f(M_1)) \subseteq M_1 + \ker f \quad (*)$

ومن جهة ثانية فإنّ:

$\forall x \in M_1 \Rightarrow f(x) \in F(M_1) \Rightarrow x \in F^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow M_1 \subseteq F^{-1}(f(M_1))$

ولدينا: $F^{-1}(\{0_N\}) \subseteq F^{-1}(f(M_1))$ ومنهُ $\{0'\} \subseteq F(M_1)$

وبالتالي: $\ker f \subseteq F^{-1}(F(M_1))$

$M_1 + \ker f \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \quad \ldots (**)$

من (*) و (**) نحصل على العلاقة المطلوبة أي أنّ:

$f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \ker f$

نتيجة: من الملاحظة السابقة يكون $F^{-1}(f(M_1)) = M_1$ إذا كان $\ker f \subseteq M_1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهان 17 أ) واضح أنّ $\ker f \subseteq M$ وغير خالية لأنّ $f(o)=o'$ فينتج $o \in \ker f$

ب) $\forall x,y \in \ker f \Rightarrow f(x)=f(y)=o' \Rightarrow$

$f(x-y)=f(x)-f(y)=o'-o'=o' \Rightarrow x-y \in \ker f$

ج) $\forall \lambda \in R,\ x \in \ker f \Rightarrow f(x)=o' \Rightarrow$

$f(\lambda \cdot x)=\lambda \cdot f(x)=\lambda \cdot o'=o' \Rightarrow \lambda \cdot x \in \ker f$

برهان 18 لبرهان الشرط: الفرض: F هو R ـ حاوي جورفيزم

المطلوب: $\ker f=\{o\}$

$\forall x \in \ker f \Rightarrow F(x)=o' \Rightarrow F(x)=F(o) \overset{F \text{ متباين}}{\Rightarrow} x=o \Rightarrow \ker f=\{o\}$

لكفاية الشرط: الفرض: $\ker f=\{o\}$

المطلوب: F هو R ـ حاوي جورفيزم

$\forall x_1,x_2 \in M;\ F(x_1)=F(x_2) \Rightarrow F(x_1)-F(x_2)=o' \Rightarrow$

$f(x_1-x_2)=o' \Rightarrow x_1-x_2 \in \ker f=\{o\} \Rightarrow x_1-x_2=o \Rightarrow x_1=x_2$

وبالتالي F متباين وبما أنّ F هو R هوجوجورفيزم فإنّ F تكون R ـ حاوي جورفيزم

مثال: إذا كانت M مودول فوق حلقة واحدية R، و n عدد صحيح موجب فإنّ M^n يكون R ـ مودول. إنّ التطبيق $f: M^n \to M$ المعرّف بالشكل:

$\forall x_1,\dots,x_n \in M^n \quad F(x_1,\dots,x_n)=x_i;\ i=1,\dots,n$

يكون أيو جورفيزم (أي هو موجورفيزم غامر) نسمي هذا التطبيق بالإسقاط لـ M^n على M

[برهان ذلك].

• **مودول الهوموجورفيزمات:** ليكن M و N مودولين فوق حلقة واحدية R نرمز بـ $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ لمجموعة كل الهوموجورفيزمات للمودول M في المودول N فوق الحلقة R

• إذا كان $f,g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ فإنّه يعرّف $f+g$ و الجداء السلمي λf بالشكل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall x \in M$

$(\lambda f)(x)=\lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وكذلك يكون $F(F^{-1}(N_1)) = N_1$ إذا كان $N_1 \subseteq Imf$

نظريات الايزومورفيزم:

نظرية (1): لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة (واحدية) و M و M' مودولين فوق R و $f: M \to M'$ هومومورفيزم فإنه يكون $M/\ker f \cong f(M)$ - R

البرهان: لنأخذ التطبيق: $\varphi: M/\ker f \to f(M)$ والمعرف بالشكل:

$$\varphi(x+\ker f) = f(x) \quad \forall x \in M$$

إن φ معرف جيداً لأنه $\forall x_1, x_2 \in M$ و $x_1 + \ker f = x_2 + \ker f$

$$x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0' \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(x_1 + \ker f) = \varphi(x_2 + \ker f)$$

إن φ هومومورفيزم لأن

1] $\forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow \varphi\big((x_1 + \ker f) + (x_2 + \ker f)\big) =$

$$\varphi\big((x_1 + x_2) + \ker f\big) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$= \varphi(x_1 + \ker f) + \varphi(x_2 + \ker f)$$

2] $\forall \lambda \in R \quad x \in M \Rightarrow \varphi(\lambda(x + \ker f)) = \varphi(\lambda x + \ker f)$

$$= f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \varphi(x + \ker f)$$

3] إن φ متباين لأن

$\forall x_1, x_2 \in M$ و $\varphi_1(x_1 + \ker f) = \varphi_2(x_2 + \ker f)$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0' \Rightarrow$$

$$x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1 + \ker f = x_2 + \ker f$$

4] إن φ غامر لأنه

$$y \in f(M) \Rightarrow \exists x \in M, \; y = f(x) \Rightarrow \exists x + \ker f \in M/\ker f;$$

$$\varphi(x + \ker f) = f(x) = y$$

مما سبق نجد أن φ ايزومورفيزم فوق R ومنه فإن $M/\ker f \cong f(M)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتيجة: إذا كانت $(R,+,\cdot)$ حلقة (واحدية)، و M و M' مودولين فوق R و $f: M \to M'$ هو R - إبيمورفيزم (أي هومومورفيزم غامر) فإنّ:

$$M/\ker f \cong M'$$

بدّ من إذا كان f غامر فإنّ $f(M) = M'$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z