كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

الموديولات : Modules

تعريف : لتكن $(A,+,.)$ حلقة ما، و M مجموعة غير خالية، ولنعرّف على M عمليتين : داخلية نرمز لها بـ $(+)$ ونسمّيها عملية الجمع وعملية خارجية وهي التطبيق

$$\circ : R \times M \to M$$

$$(\lambda, x) \to \lambda x$$

نسمّيها عملية الضرب بكمية سلمية.

نسمي M موديول يساري فوق الحلقة R أو R - موديول يساري إذا تحققت الشروط:

1- $(M,+)$ زمرة تبديلية

2- $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

3- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

4- $(\alpha.\beta)x = \alpha(\beta.x)$ وذلك $\forall x,y \in M \quad \alpha,\beta \in R$

وإذا كانت الحلقة $(R,+,.)$ ذات عنصر وحدة 1 وإذا تحقق بالإضافة إلى الشروط السابقة الشرط

5- $1.x = x \quad \forall x \in M$

فإننا نقول إن M موديول يساري واحدي فوق R.

بطريقة مشابهة نعرّف الموديول اليميني فوق R (R - موديول يميني) والموديول اليميني الواحدي فوق R: حيث نأخذ العملية الخارجية بالشكل: $\circ : M \times R \to R$

$$(x,\lambda) \to x\lambda$$

وتصبح الشروط بالشكل:

1- $(M,+)$ زمرة تبديلية

2- $x(\alpha+\beta) = x\alpha + x\beta$

3- $(x+y).\alpha = x\alpha + y\alpha$

4- $x(\alpha.\beta) = (x.\alpha).\beta$ وذلك $\forall x,y \in M \quad \alpha,\beta \in R$

وإذا كانت الحلقة $(R,+,.)$ ذات عنصر وحدة 1 وتحقق بالإضافة إلى الشروط السابقة الشرط 5- $\forall x \in M \quad x.1 = x$ فإننا نقول إنّ M مودول يميني فوق R

ملاحظات

ملاحظة (1): إذا كانت R حلقة تبديلية فإننا نرى بسهولة أنّ كل R ـ مودول يساري M يمكن أن يكون R مودول يميني وذلك بوضع

$x.r = r.x \quad \forall x \in M \quad \& \quad r \in R$

(الشرط R تبديلية ضروري لشرط الرابع من تعريف المودول وذلك لأنّه:

$x(\alpha.\beta) = (\alpha.\beta)x = (\beta.\alpha)x = \beta(\alpha x) = \beta(x.\alpha) = (x.\alpha).\beta$

• فيما سيأتي سنتكلم فقط عن المودولات اليسارية لذلك فإنّ كلمة مودول سنعني بها مودول يساري وكل النظريات حول R ـ مودولات يسارية تكون صحيحة من أجل R ـ مودولات يمينية

ملاحظة (2): عندما تكون R حلقة واحدية فإننا نعرّف المودول الواحدي فوق R، أي تحقق الشروط الخمسة السابقة وسوف نقول R ـ مودول ونعني به R ـ مودول واحدي

ملاحظات: لتكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) و M ـ R مودول

1- إذا كانت الحلقة R حقلاً فإنّ M المحققة للشروط الخمسة السابقة تكون فضاء شعاعي فوق الحقل R، أي أنّ المودولات تُعتبر تعميم للفضاءات الشعاعية

2- يجب التمييز بين العملية الجبرية $(+)$ المعرفة على الحلقة R وبين العملية الداخلية $(+)$ المعرفة على M وكذلك يجب التمييز بين العملية الداخلية $(.)$ المعرفة على الحلقة R والعملية الخارجية $(.)$ المعرفة على M

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الواجب: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية و M R-موديول عندئذٍ:

1. $\forall x \in M \quad 0_R \cdot x = 0_M$
2. $\forall \lambda \in R \quad \lambda \cdot 0_M = 0_M$
3. $\forall x \in M \quad \lambda \in R \quad (-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda \cdot x)$
4. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad a \in M \quad \& \quad r \in R \quad n(ra) = r(na)$

حيث na تعرّف كما في الزمر $n > 0$ ؛ $na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ مرة}}$

عدد صحيح سالب

$n < 0$ ؛ $na = (-m)a = m(-a) = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{m \text{ مرة}}$ $\quad n = -m$

عدد صحيح موجب

5. $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x$

$\forall x \in M \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R \quad n \geq 2$

6. $\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in M \quad \lambda \in R \quad n \geq 2$

البرهان:

1. $0_R x = (0_R + 0_R)x = 0_R x + 0_R x$

$\Rightarrow 0_M + 0_R x = 0_R x + 0_R x \Rightarrow 0_R \cdot x = 0_M$

3. $\lambda x + (-\lambda)x = (\lambda + (-\lambda))x = 0_R \cdot x = 0_M$

$\Rightarrow (-\lambda)x = -(\lambda x)$

- $\lambda x + \lambda(-x) = \lambda(x + (-x)) = \lambda \cdot 0_M = 0_M \Rightarrow \lambda(-x) = -(\lambda x)$

5. $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x = \left(\lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right) x = \lambda_1 x + \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right) x =$

$\lambda_1 x + \left(\lambda_2 + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i\right) x = \lambda_1 x + \lambda_2 x + \left(\sum_{i=3}^{n} \lambda_i\right) x +$

$= \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x$

نتيجة: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية و M R-موديول فإنّ:

$\forall x \in R \quad ; \quad (-1) \cdot x = -x$

لأنّ: $(-1)x = -(1 \cdot x) = -x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أمثلة: 1. كل زمرة جمعية تبديلية G هي موديول فوق حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حيث أن na $(a\in G \; ; \; n\in\mathbb{Z})$ يعرف كما في الزمر.

2. لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية و n عدد صحيح موجب ولنأخذ المجموعة $R^n=\{(r_1,\dots,r_n) \mid r_1,\dots,r_n\in R\}$ ولنعرف على R^n عمليتين:

عملية داخلية $(+)$ بالشكل: $(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$

وعملية خارجية بالشكل $\alpha(a_1,\dots,a_n)=(\alpha a_1,\dots,\alpha a_n)$

$\forall \alpha\in R \quad (a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)\in R^n$

إن R^n تشكل موديول فوق R [تحقق من ذلك].

• إذا كان $n=1$ فإنه يمكن النظر إلى R على أنها موديول فوق نفسها حيث تتطابق العملية الداخلية مع عملية الجمع في الحلقة والعملية الخارجية هي عملية الضرب في الحلقة.

• كما أنه إذا كانت R حلقة (واحدية) و S حلقة جزئية منها $(\text{تحوي } 1 \text{ عنصر الوحدة في الحلقة } R)$ فإن R موديول فوق S.

3. لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية ولتكن M مجموعة كل التطبيقات $f: S\to R$ ولنعرف على M عمليتين داخليتين $(+)$ بالشكل

$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall f,g\in M \quad x\in S$

وعملية خارجية بالشكل: $(\lambda f)(x)=\lambda . f(x) \quad \forall f\in M \quad \lambda\in R \quad x\in S$

عندئذٍ M تكون موديول فوق R أثبت ذلك؟

الحل: 1- إن $(M,+)$ زمرة تبديلية (يُقبل دون برهان شروط الزمرة بالتفصيل).

2- $\forall f,g\in M \quad \lambda\in R \quad x\in S \Rightarrow$

$[\alpha(f+g)](x)=\alpha(f+g)(x)=\alpha[f(x)+g(x)]=\alpha f(x)+\alpha g(x)$

$=(\alpha f)(x)+(\alpha g)(x)=(\alpha f+\alpha g)(x)=\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$

3- $\forall f\in M \quad \alpha,\beta\in R \quad x\in S \Rightarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$[(\alpha+\beta).f](x) = (\alpha+\beta).f(x) = \alpha.f(x) + \beta.f(x) =$

$(\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x) \Rightarrow (\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$

4- $\forall \alpha, \beta \in R \quad f \in M \quad x \in S$

$[(\alpha\beta).f](x) = (\alpha\beta).f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha((\beta.f)(x)) =$

$(\alpha.(\beta f))(x) \Rightarrow (\alpha\beta).f = \alpha(\beta.f)$

5- $\forall f \in M, x \in S \Rightarrow (1.f)(x) = 1.f(x) = f(x)$

$\Rightarrow 1.f = f$

ما سبق نجد أنّ M هو R ـ موديول.

• **الموديولات الجزئية:** ليكن $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) و M ـ R موديول و N مجموعة جزئية غير خالية من M. إذا كانت N هي R ـ موديول بالنسبة لمقوري العملية الداخلية والخارجية في M على N، فإننا نسمي N موديول جزئي من M فوق R (أو R ـ موديول جزئي).

نظرية: إذا كانت $(R,+,.)$ حلقة (واحدية)، و M ـ R موديول و N مجموعة جزئية غير خالية من M فإنّ N يكون موديول جزئي من M فوق R إذا تحققت الشروط التالية:

1- $\forall x_1, x_2 \in N \; ; \; x_1 - x_2 \in N$

2- $\forall \lambda \in R \quad x \in N \; ; \; \lambda x \in N$

ملاحظات وأمثلة:

1- إذا كانت $(R,+,.)$ حلقة (واحدية) و M ـ R موديول، فإنّ M يحوي على الأقل موديولين جزئيين هما M و $\{0\}$.

2- كل زمرة جزئية من زمرة جمعية تبديلية G هي موديول جزئي من الموديول G فوق $\mathbb{Z}$.

3- إذا كانت R حلقة واحدية فإنّ كل مثالية يسارية من الحلقة R هي موديول جزئي من الموديول R نفسها.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة