كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : **الحادية عشر/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٣

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

توقع الدوال ذات المتغيرين العشوائيين:

ليكن تجربي مجربي يرد مرتين فإذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغيرين X و Y تعتمد على نتائج الرميات بالشكل:

$$U(x,y)=\begin{cases} X+Y \text{ و } X\neq Y & X \text{ و } Y \text{ زوجيان معاً أو مرديان معاً} \\ -(X+Y) \text{ و } & X \text{ و } Y \text{ أحدهما زوجي والآخر مردي} \\ X \text{ و } & X=Y \text{ و } X \text{ مردي} \\ -X \text{ و } & X=Y \text{ و } X \text{ زوجي} \end{cases}$$

جدول (1):

y \ x	1	2	3	4	5	6	–
1	1	-3	4	-5	6	-7	–
2	-3	-2	-5	6	-7	8	–
3	4	-5	3	-7	8	-9	–
4	-5	6	-7	-4	-9	10	–
5	6	-7	8	9	5	-11	–
6	-7	8	-9	10	-11	-6	–

$$P(U(x,y)=5)=\frac{1}{36}$$

$$P(U(x,y)=-5)=\frac{4}{36}$$

TEL:0931497960 - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - مكتبة A to Z

جدول (2):

U	-11	-9	-7	-6	-5	-4	-3	-2	1	3	4	5	6
p(U)	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$

U	8	10
p(U)	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$E(U) = \sum U.p(U) = (\frac{2}{36})(-11) + \frac{4}{36}(-9) + \dots + \frac{2}{36}(10) = -\frac{5}{4}$

إذاً لقد قمنا بالنظر على الدالة $U(X,Y)$ على أنها متغيّر عشوائي أحادي البُعد يتبع توزيعاً متقطّعاً دالة كتلته الاحتمالية موضّح بالجدول السابق [2] وقمنا بحساب التوقع كالمعتاد.

• هنالك طريقة أخرى لإيجاد توقّع الدالة U وهو أن نتعامل معها كدالة بمتغيرين X و Y هذان المتغيران يتبعان توزيعاً احتمالياً ثنائي البعد متقطع دالة كتلته الاحتمالية موضّحة بالجدول [1] في هذه الحالة:

$$E(U) = \sum_{(x,y)\in R_{x,y}} \sum U(x,y).f(x,y)$$

$$E(U) = 1(\frac{1}{36}) + (-3)(\frac{1}{36}) + (-7)(\frac{1}{36}) + \dots + (-6)\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}(1-3+4-5 \dots -6) = -\frac{5}{4}$$

الخلاصة: ليكن (X,Y) متغيّر عشوائي ثنائي له دالة توزيع احتمالي مشترك $f(x,y)$ إذا كانت $U=U(x,y)$ دالة بالنسبة لـ x, y فإنّ توقّع هذه الدالة يُعطى بالعلاقة:

توزيع ثنائي متقطّع: $E(U) = \sum_{(x,y)\in R_{x,y}} \sum U(x,y).f(x,y)$

توزيع ثنائي مستمر: $E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(x,y).f(x,y)\,dx\,dy$

ملاحظة: [1] إذا كان (X,Y) متغيّراً عشوائياً ثنائياً له دالة توزيع احتمالي مشترك

عندئذٍ $U(x,y) = a_1x + a_2y = f(x,y)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$E(U) = a_1 E(x) + a_2 E(y)$

$Var(U) = a_1^2 Var(x) + a_2^2 Var(y) + 2 a_1 a_2 cov(x,y)$

حيث $cov(x,y) = E(xy) - E(x)\,E(y)$ يسمّى التغاير.

الإثبات:

$$E(U) = E(a_1x + a_2y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1x + a_2y)\, f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x)\,dx + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_2(y)\,dy$$

$$= a_1 E(x) + a_2 E(y)$$

نعلم أنّه في التوزيع الثنائي:

$$E(x) = \sum x\, f_1(x)$$
$$E(y) = \sum y\, f_2(y)$$

} في حالة المتقطع.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x)\,dx$$
$$E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_2(y)\,dy$$

} في حالة المستمر

لبرهان المتحقّق الثاني:

$$U^2 = (a_1x + a_2y)^2 = a_1^2x^2 + a_2^2y^2 + 2a_1a_2xy$$

نعرّف دالة: $g(x,y) = a_1^2x^2 + a_2^2y^2 + 2a_1a_2xy$

$$E(U^2) = E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1^2x^2 + a_2^2y^2 + 2a_1a_2xy)\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= a_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx + a_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\,dy + 2a_1a_2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= a_1^2 E(x^2) + a_2^2 E(y^2) + 2a_1a_2 E(x,y)$$

كما ولدينا:

$$Var(U) = E(U^2) - \{E(U)\}^2$$

$$Var(U) = a_1^2 E(x^2) + a_2^2 E(y^2) + 2a_1a_2 E(x,y) - a_1^2\{E(x)\}^2 - a_2^2\{E(y)\}^2 - 2a_1a_2 E(x)\,E(y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$Var(U) = a_1^2 Var(X) + a_2^2 Var(Y) + 2a_1a_2 Cov(X,Y)$$

ملاحظة: عندئذٍ $a_1 = a_2 = 1$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

وعندما $a_1 = 1$ و $a_2 = -1$ عندئذٍ فإن:

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y)$$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$

تمرين: نظام الكتروني مكوّن من عدّة مكوّنات هذه المكوّنات قد تتعرّض للعطل لذلك يوجد مكوّنات احتياطية تحلّ محلّها لضمان استمرار عمل النظام الالكتروني بزمن لا ستمرار عمل هذا النظام الالكتروني بالزمن T حيث $T = X + Y$ و X إلى المكوّنات الأساسية للنظام الالكتروني و Y ترمز للمكوّنات الاحتياطية فإذا كانت X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين ومستقلين كل منها توزيع احتمالي معطى بالعلاقتين $\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ و $\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$ حيث $0 < x, y < \infty$ على الترتيب.

احسب متوسط البقاء لهذا النظام الالكتروني وتباينه؟

الحل: الدوال الهامشية هي:

$$f_1(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

$$f_2(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$$

X و Y كل منها يتبع توزيعاً أسّياً سالباً بمعالم وهي λ_1 و λ_2 على الترتيب إذاً:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda_1} \qquad E(Y) = \frac{1}{\lambda_2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda_1^2} \qquad Var(Y) = \frac{1}{\lambda_2^2}$$

$$E(T) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

وبما أنّ X و Y مستقلان إذاً:

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}$$

$$E(X,Y) = \int_0^\infty x_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \int_0^\infty y_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy = E(X)\, E(Y) = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\lambda_2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$Var(T) = Var(X) + Var(Y) + 2\,cov(X,Y)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + 2\left[\frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{1}{\lambda_2}\right] = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}$$

ملاحظة: X ، Y مستقلان يتبعان توزيعاً ثنائياً مشتركاً $f(x,y)$

$$E(X,Y) = E(X)\cdot E(Y) \quad cov(X,Y) = 0$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة