كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : **العاشرة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تكملة حل التمرين من المحاضرة السابقة.

4. $F_1(x) = F(x,\infty) = \frac{1}{27}x^3$

$F_1(x) = \int_0^x f_1(u)\,du = \int_0^x \frac{u^2}{9}\,du = \left[\frac{u^3}{27}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$

$F_2(y) = F(\infty,y) = \int_0^y f_2(v)\,dv = \frac{y^3}{27}$

• التوزيع الثنائي الشرطي:

نميز حالتين: 1. متغير عشوائي متقطع:

$p(X=x \mid Y=y) = \frac{p(X=x,\ Y=y)}{p(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$; $f_2(y) \neq 0$

$p(Y=y \mid X=x) = \frac{p(Y=y,\ X=x)}{p(X=x)} = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$; $f_1(x) \neq 0$

وبصورة عامة نعرف دوال التوزيع الثنائي الشرطي بالشكل:

$g_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$; $f_2(y) \neq 0$

$g_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$; $f_1(x) \neq 0$

نعرف بالنتيجة دوال التوزيع الثنائي الشرطي:

$G_1(x|y) = \sum_{u \leq x} g_1(x|y)$ $\qquad$ $G_2(y|x) = \sum_{v \leq y} g_2(y|x)$

تمرين: ليكن لدينا:

y \ x	0	1	2	3
0	0.05	0.1	0.15	0.05
1	0.1	0.2	0.1	0.05
2	0.05	0.1	0.05	0

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

المطلوب: أوجد $f_1(x)$ ، $f_2(y)$ ، $F_1(x)$ ، $F_2(y)$ ، $g_1(x|y)$ و

$G_1(x|y)$ ، $g_2(y|x)$ ، $G_2(y|x)$ ؟

الحل:

- $f_1(x) = \sum_{y \in R_{x,Y}} f(x,y)$

$f_1(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = 0.2$

$f_1(1) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$

$f_1(2) = 0.15 + 0.1 + 0.05 = 0.3$

$f_1(3) = 0.05 + 0.05 + 0 = 0.1$

- $F_2(y) = \sum_{x \in R_{2,y}} f(x,y)$

$f_2(0) = f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) + f(3,0)$

$= 0.05 + 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.35$

$F_2(1) = 0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.05 = 0.45$

$F_2(2) = 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0 = 0.20$

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

y	0	1	2
$f_2(y)$	0.35	0.45	0.2

- $F_1(x) = \sum_{u \le x} f_1(u)$ - $F_2(y) = \sum_{v \le y} f_2(v)$

x	0	1	2	3
$F_1(x)$	0.2	0.6	0.9	1

y	0	1	2
$F_2(y)$	0.35	0.8	1

- $g_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$; $f_2(y) > 0$ دالة متقطعة

$g_1(0|0) = \frac{F(0,0)}{F_2(0)} = \frac{0.1}{0.35} = \frac{5}{35}$

$g_1(1|0) = \frac{F(1,0)}{F_2(0)} = \frac{0.1}{0.35} = \frac{10}{35}$ $g_1(2|0) = \frac{F(2,0)}{F_2(0)} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{15}{35}$

$g_1(3|0) = \frac{f(3,0)}{F_2(0)} = \frac{0.05}{0.35} = \frac{5}{35}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

x	0	1	2	3
$g_1(x\|0)$	$\frac{5}{35}$	$10/35$	$15/35$	$5/35$

- $g_1(0|1) = \frac{F(0,1)}{F_2(1)} = \frac{0.1}{0.45} = \frac{10}{45}$
- $g_1(1,1) = \frac{F(1,1)}{F_2(1)} = \frac{0.2}{0.45} = \frac{20}{45}$
- $g_1(2|1) = \frac{F(2,1)}{F_2(1)} = \frac{0.1}{0.45} = \frac{10}{45}$
- $g_1(3|1) = \frac{F(3,1)}{F_2(1)} = \frac{0.05}{0.45} = \frac{5}{45}$

x	0	1	2	3
$g_1(x\|1)$	$10/45$	$20/45$	$10/45$	$5/45$

- $g_1(0|2) = \frac{F(0,2)}{F_2(2)} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{5}{20}$
- $g_1(1|2) = \frac{F(1,2)}{F_2(2)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{10}{20}$
- $g_1(2|2) = \frac{F(2,2)}{F_2(2)} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{5}{20}$
- $g_1(3|2) = \frac{F(3,2)}{F_2(2)} = \frac{0}{0.2} = 0$

ملاحظة: إذا كانت إحدى قيم $F_1(x)$ أو $F_2(y)$ تأخذ القيمة صفر فلا يمكن إيجاد الدالة الشرطية المقابلة لها لأنها سوف تعدم المقام.

x	0	1	2	3
$G_1(x\|0)$	$5/35$	$15/35$	$30/35$	1

2. متغير عشوائي مستمر:

$g_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$; $f_2(y) > 0$

حالة متغيرها x ونكاملها على كامل فضاء العينة فيعطي 1

$g_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$; $f_1(x) > 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين : ليكن لدينا :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y) & ; \ 0<x<y \ \ \& \ \ 2\le y<4 \\ 0 & ; \text{ خلاف ذلك}\end{cases}$$

1) تحقق أنّ $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة ؟

الحل :

$$\int_2^4\int_0^y f(x,y)\,dx\,dy=\int_2^4\int_0^y \frac{1}{8}(6-x-y)\,dx\,dy=$$

$$\frac{1}{8}\int_2^4 dy\int_0^y [(6-y)-x]\,dx=$$

$$\frac{1}{8}\int_2^4 dy\left[(6-x)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^y=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)y-\frac{y^2}{2}\right]dy=$$

$$\frac{1}{8}\int_2^4\left(6y-\frac{3}{2}y^2\right)dy=\frac{1}{8}\left[3y^2-\frac{1}{2}y^3\right]_2^4=$$

$$\frac{1}{8}\left[3(16)-\frac{1}{2}(64)-3(4)+\frac{1}{2}(8)\right]$$

$$=\frac{1}{8}[48-32-12+4]=\frac{8}{8}=1$$

إذاً $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة

2) أوجد الدوال الهامشية ؟

$$f_1(x)=\int_2^4 f(x,y)\,dy=\frac{1}{8}\int_2^4(6-x-y)\,dy=\frac{1}{8}\left[(6-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_2^4$$

$$=\frac{1}{8}[(6-x)4-8-(6-x)2+2]$$

$$=\frac{1}{8}[24-4x-8-12+2x+2]$$

$$f_1(x)=\frac{1}{8}(-2x+6)\ ;\quad 0<x<4$$

$$f_2(y)=\int_0^y f(x,y)\,dx=\frac{1}{8}\int_0^y(6-x-y)\,dx=\frac{1}{8}\left[6x-\frac{x^2}{2}-yx\right]_0^y$$

$$=\frac{1}{8}\left[6y-\frac{y^2}{2}-y^2\right]=\frac{1}{8}\left[6y-\frac{3y^2}{2}\right]\ ;\quad 2<y<4$$

3) استنتج الدوال الشرطية $g_1(x|y)$ ، $g_2(y|x)$ ؟

الحل :

$$g_1(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{1}{8}\left(6y-\frac{3}{2}y^2\right)}=\frac{2(6-x-y)}{12y-3y^2}=$$

$$\frac{12-2x-2y}{12y-3y^2}\ ;\quad 0<x<y \ \ \& \ \ 2<y<4$$

$$g_2(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{1}{8}(-2x+6)}=\frac{6-x-y}{6-2x}\ ;\quad 0<x<y \ \ \& \ \ 2<y<4$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: ليكن لدينا الدالة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2x^2y} & ; \ 1<x<\infty \\ & \ \frac{1}{x}<y<x \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

المطلوب: [1] - تحقق أنّ $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة؟

[2] - أوجد الدوال الهامشية $f_1(x)$ و $f_2(y)$؟

[3] - أوجد الدوال الشرطية $g_1(x|y)$ و $g_2(y|x)$؟

الحل: [1]

$$\int_1^{\infty}\int_{1/x}^{x}\frac{1}{2x^2y}\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\int_{1/x}^{x}\frac{1}{y}\,dy=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\,[\ln y]_{1/x}^{x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}(\ln x-\ln 1/x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2\ln x}{x^2}\,dx=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

نكامل بالتجزئة حيث:

$$\ln u=u \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx=du$$

$$\frac{1}{x^2}\,dx=dv \Rightarrow v=-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow I=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}=1$$

إذاً $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية مشتركة.

[2] إيجاد الدالة الهامشية: $f_2(y)$.

$$f_2(y)=\int_1^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^2y}\,dx=\frac{1}{2y}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}=\frac{1}{2y}$$

$$\Rightarrow f_2(y)=\frac{1}{2y} \ ; \ 1<y<e^2$$

إيجاد الدالة الهامشية: $f_1(x)$

$$f_1(x)=\int_{1/x}^{x}f(x,y)\,dy=\int_{1/x}^{x}\frac{1}{2x^2y}\,dy=\left[\frac{\ln y}{2x^2}\right]_{1/x}^{x}=$$

$$\frac{\ln x-\ln 1/x}{2x^2}=\frac{\ln x}{x^2} \ ; \ 1<x<\infty$$

[3] إيجاد الدوال الشرطية:

$$g_1(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{\frac{1}{2x^2y}}{1/2y}=\frac{1}{x^2} \ ; \ 1<x<\infty$$

$$g_2(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1/2x^2y}{\ln x/x^2}=\frac{1}{2y\ln x} \ ; \ \frac{1}{x}<y<x \ \&\ 1<x<\infty$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* المتغيرات العشوائية المستقلة:

* X و Y مستقلان إذا وفقط إذا: $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ $\Leftrightarrow$

* X و Y مستقلان $\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$

* X و Y مستقلان $\Leftrightarrow$ $g_1(x|y) = f_1(x)$

* X و Y مستقلان $\Leftrightarrow$ $g_2(y|x) = f_2(y)$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z