كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المتغيرات العشوائية الثنائية :

إنّ ملاحظة ظاهرة معينة قد تتطلب أكثر من متغيّر. هذه المتغيرات إمّا أن تكون متقطّعة كلّها أو مستمرة كلّها أو مختلطة.

- عدد الأولاد وعدد القطع الحلوى (متقطعان معاً)
- كمية الأمطار الهاطلة وزمن الهطول (مستمران معاً)
- عدد السيارات العابرة وزمن عبورها (مختلفة)

المتغير العشوائي المتقطع الثنائي ودوال التوزيع الاحتمالية :

(X,Y) متغير عشوائي ذو بُعدين أو متّجه عشوائي إذا كان عدد القيم الممكنة للثنائية (x,y) منتهٍ أو معدود لانهائي عندئذٍ فإنّ (X,Y) يُدعى متغيراً عشوائياً متقطعاً ذو بعدين

- فضاء العيّنة المتعلّق به بالشكل: $R_{x,y} = \{(x,y) : x \in \Omega_X , y \in \Omega_Y\}$

وبحيث أنّ Ω_X مجموعة قيم المتغير العشوائي الأول

Ω_Y مجموعة قيم المتغير العشوائي الثاني

إنّ الدالة التي تُستخدم لحساب احتمال أن يأخذ المتغيّر العشوائي X القيمة x والمتغير العشوائي Y القيمة y تُدعى دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة ويرمز لها $f(x,y)$

$$f: \Omega_X \times \Omega_Y \to [0,1]$$
(ضرب)

$$(x,y) \to f(x,y)$$

هذا وتحقّق دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة الخواص التالية:

1. $0 \leq f(x,y) \leq 1$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

2) $\sum_{(x,y)\in R(x,y)}\sum f(x,y)=1$

3) $p(A)=\sum_{(x,y)\in A}\sum f(x,y)$; $A\subseteq R_{(x,y)}$

تعريف: ليكن (X,Y) متغيراً عشوائياً متقطعاً حادث دالة التوزيع التجميعية (التراكمي) المشتركة تعرف كما يلي:

$$F(x,y)=p(X\le x, Y\le y)=\sum_{t\le x}\sum_{r\le y} f(t,r)$$

هذه الدالة تحقق الخواص التالية:

1) $F(x,y)\ge 0$

2) $F(\infty,\infty)=1$

3) $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$

4) $F(x,y)$ دالة غير متناقصة وهذا يكافئ القول:

إذا كان: $x_1\le x_2$ & $y_1\le y_2 \Leftrightarrow F(x_1,y_1)\le F(x_2,y_2)$

تمرين: إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y تعطى بالعلاقة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\binom{2}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} & ; \ x=1,2,\dots,\infty \\ & \ y=0,1,2 \\ 0 & ; \text{ خلاف ذلك}\end{cases}$$

أوجد $p(X\le 3, Y\le 1)$ ؟

الحل:

$$p(X\le 3, Y\le 1)=\sum_{(x,y)\in A}\sum \binom{2}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}= \quad A=\{(x,y)\ ; \ x\le 3, y\le 1\}$$

$$\sum_{y\le 1}\binom{2}{y}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]=\sum_{y\le 1}\binom{2}{y}\left(\frac{4+2+1}{32}\right)=\frac{7}{32}\sum_{y\le 1}\binom{2}{y}=$$

$$\frac{7}{32}\left[\binom{2}{0}+\binom{2}{1}\right]=$$

$$\frac{7}{32}[1+2]=\frac{21}{32}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

• المتغير العشوائي الثنائي المستمر:

ليكن (X,Y) متغيراً عشوائياً ذو بعدين ولنفرض أن X, Y كل منهما متغير عشوائي مستمر عندئذٍ نقول أن (X,Y) متغير عشوائي مستمر ذو بعدين.

• نقول إن $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية مشتركة لهذا المتغير العشوائي وهي تحقق الشروط التالية:

1) $f(x,y) \geq 0$ وذلك مهما يكن $(x,y) \in R_{x,y}$ حيث $R_{x,y}$ هي مجموعة قيم المتغير العشوائي الثنائي المستمر.

2) $\iint_{R_{x,y}} f(x,y) = 1$

3) احتمال أي حدث A حيث $A \subseteq R_{x,y}$ يعطى بالعلاقة:

$$p\{(x,y) \in A\} = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

تمرين:

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot x^2 y^2 & ; \ -1 \leq x \leq 1 \ \& \ x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك.} \end{cases}$$

المطلوب: ايجاد قيمة الثابت c ؟

الحل:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{x^2}^{1} cx^2y\,dx\,dy = 1 \iff c\int_{-1}^{+1} x^2\,dx \int_{x^2}^{1} y\,dy \iff$$

$$c\int_{-1}^{+1} x^2\,dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1} \iff c\int_{-1}^{1} x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = c\int_{-1}^{+1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{2}\right)dx = 1$$

$$c\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^7}{14}\right] = 1 \iff c\left[\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{14}\right)-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{14}\right)\right] = 1$$

$$c\left(\frac{2}{6}-\frac{2}{14}\right) = 1 \iff c\left(\frac{14-6}{42}\right) = 1 \iff \frac{8}{42} = 1 \iff c = \frac{42}{8}$$

$$\boxed{c = \frac{21}{4}}$$

تذكرة: $\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$ بالتالي $\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

إذاً:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 2-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: أثبت أنّ هذه الدالة:

$$F(x,y)=\begin{cases}\binom{2}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} & ; \quad x=0,1,2,\ldots \quad y=0,1,2 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

هي دالة كتلة احتمالية مشتركة؟

الحل: يجب اثبات أنّ $\sum\sum_{R_{x,y}} f(x,y)=1 \iff \sum\sum \binom{2}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \Rightarrow \sum_{y=0,1,2}\binom{2}{y}\cdot\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}=$

$$\left[\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\right]\left[\frac{1}{4}\right]=(1+2+1)\left(\frac{1}{4}\right)=4\left(\frac{1}{4}\right)=1$$

• الدوال الهامشية:

التعريف: ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين بدالة كتلة احتمالية مشتركة $f(x,y)$ في الفضاء $R_{x,y}$ إنّ دالة التوزيع الهامشيّة لكلٍ من المتغيرين X و Y هي:

$$F_1(x)=\sum_{y\in R_{x,y}} f(x,y) \quad , \quad F_2(y)=\sum_{x\in R_{x,y}} f(x,y)$$

وفي حالة X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة $f(x,y)$ إنّ الدوال الهامشية لكلٍ من X و Y هي:

$$f_1(x)=\int_{y\in R_{x,y}} f(x,y)\,dy \quad , \quad f_2(y)=\int_{x\in R_{x,y}} f(x,y)\,dx.$$

وتكون دوال التوزيع الهامشية (التراكمية) كالتالي:

في حالة متقطع (x,y):

- $F_1(x)=\sum_{u\le x} f_1(u)$
- $F_2(y)=\sum_{v\le y} F_2(v)$

في حالة مستمر (x,y):

- $F_1(x)=\int_{u<x} f_1(u)\,du$
- $f_2(x)=\int_{v<y} f_2(v)\,dv$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{81} & ;\ 0<x<3\ ,\ 0<y<3\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

1. تحقق أن $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة ؟
2. أوجد $F(x,y)$ دالة التوزيع التراكمي المشتركة ؟
3. أوجد الدوال الهامشية $f_1(x)$ و $f_2(x)$ ؟
4. أوجد دوال التوزيع التراكمي الهامشية ؟

الحل:

1)
$$\int_0^3\int_0^3 \frac{x^2y^2}{81}\,dx\,dy=\frac{1}{81}\int_0^3 x^2dx\cdot\int_0^3 y^2dy=\frac{1}{81}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$=\frac{81}{81}\left(\frac{27}{3}\right)\left(\frac{27}{3}\right)=\frac{81}{81}=1$$

إذاً F دالة كثافة احتمالية مشتركة .

2)
- $F(x,y)=\int_0^y\int_0^x f(u,v)\,du\,dv=\frac{1}{81}\int_0^y\int_0^x u^2v^2\,du\,dv=$

$$\frac{1}{81}\int_0^y v^2dv\cdot\int_0^x u^2du=\frac{1}{81}\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^y\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x \quad ;\ 0<x<3,\ 0<y<3$$

- $F(x,y)=\frac{1}{81}\int_0^y v^2dv\int_0^3 x^2dx \quad ;\ x>3,\ 0<y<3$

$$=\frac{1}{81}\left(\frac{y^3}{3}\right)\left(\frac{27}{3}\right)=\frac{1}{27}y^3$$

- $F(x,y)=\frac{1}{81}\int_0^3 y^2dy\int_0^x u^2du \quad ;\ 0<x<3,\ y>3$

$$=\frac{1}{81}\left(\frac{27}{3}\right)\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{1}{27}x^3$$

- $F(x,y)=\frac{1}{81}\int_0^3\int_0^3 x^2y^2\,dx\,dy=1 \quad ;\ x>3\ \&\ y>3$

فتصبح دالة التوزيع المشتركة بالشكل:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & ;\ (x<0)\vee(y<0)\\ \frac{1}{729}x^3y^3 & ;\ 0<x<3\ \&\ 0<y<3\\ \frac{1}{27}x^3 & ;\ 0<x<3\ \&\ y>3\\ \frac{1}{27}y^3 & ;\ 0<y<3\ \&\ x>3\\ 1 & ;\ x>3\ \&\ y>3\end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3 ايجاد الدوال الهامشية:

- $f_1(x) = \int_0^3 f(x,y)\,dy = \frac{1}{81}\int_0^3 x^2y^2\,dy = \frac{x^2}{81}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{x^2}{81}\left[\frac{27}{3}\right]$

$= \frac{x^2}{9}$

- $F_2(y) = \int_0^3 f(x,y)\,dx = \frac{1}{81}\int_0^3 x^2y^2\,dx = \frac{y^2}{81}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{y^2}{81}(9) = \frac{y^2}{9}$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z