كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : **السابعة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• **التوزيع الطبيعي المعياري:** نعلم أنّ دالة الكثافة الاحتمالية لمتغيّر عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً يُعطى بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ; $-\infty < x < +\infty$

التوقع هو $\mu$ و التباين هو $\sigma^2$

• بالتالي لحساب $p(X < x_1)$ نحسب التكامل:

$$p(X < x_1) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

وكلتا هذا التكامل صعب إيجاده لذلك ننتقل إلى التوزيع الطبيعي المعياري بإجراء التحويل $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ وبالتالي تصبح دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Z تُعطى بالعلاقة:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \quad ; \quad -\infty < z < +\infty$$

• لحساب التوقع:

$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot dz = \left[ -e^{-\frac{1}{2}z^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

نكامل بالتجزئة فنحصل على: $E(Z^2) = 1$

$\Rightarrow \sigma^2 = E(Z^2) - \{E(Z)\}^2 = 1 - 0 = 1$ التباين $= 1$

التوقع $= 0$

• دالة التوزيع التراكمي (التوزيعي) للمتغير العشوائي Z الذي يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً يوجد جدول يحوي على قيم $\phi(z)$ أو $F(z)$.

$\phi(z) = F(z)$

**التمرين:** X متغيّر عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً بتوقع $\mu = 2$ وانحراف معياري $\sigma = 5$

المطلوب: احسب $p(1 < x < 4)$

الحل:

$\int_1^4 \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{5}\right)^2} dx$ ← لكن هذا تكامل يصعب إيجاده

إذاً نعود به إلى الحالة المعيارية (توزيع طبيعي معياري) وذلك بإجراء التحويل

$Z = \frac{x-2}{5}$ ، وحدود Z هي:

$Z_1 = \frac{1-2}{5} = -\frac{1}{5}$ ، $Z_2 = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$ ←

$p(1<x<4) = p(-\frac{1}{5} < Z < \frac{2}{5}) = \phi(\frac{2}{5}) - \phi(-\frac{1}{5})$

$= 0.6554 - 0.4602 = 0.1952$

**تمرين:** X متغيّر عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً بتوقع $\mu = 80$ و $\sigma = 900$

1) أوجد $p(X<60)$ ؟

2) إذا علمت أنّ $p(X<x_1) = 0.975$ أوجد $x_1$ ؟

الحل: 1) ننتقل إلى التوزيع الطبيعي المعياري

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-80}{900}$

$Z_1 = \frac{60-80}{900} = \frac{-20}{900} = \frac{-2}{90} = -\frac{1}{45} = -0.02$

$p(X<60) = p(Z<-0.02) = \phi(-0.02) = 0.2514$

2) $p(X<x_1) = p(Z<Z_1) = \phi(Z_1) = 0.975$

$x_1 = 1.96$

$\frac{x_1-80}{900} = 1.96 \Rightarrow x_1 = 1.96(900) + 80$

$x_1 = 1844$

**تمرين:** X متغيّر عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً، احتمال أن تكون قيمة المتغير العشوائي أقل من 50 هي 0.05 واحتمال أن تكون قيمة هذا المتغير العشوائي أكبر من 100 هي 0.05 1) أوجد $p(x \leq 70)$

2) احسب احتمال $p(X<70 \mid 60<x<80)$ ؟

الحل: 1) لم تُعطَ قيمة $\mu$ ولا قيمة $\sigma$ إذاً لا يمكن الانتقال إلى Z مباشرة بالتالي $x_1 = 50$ و $p(X<50) = 0.05$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$p(x>100) = 0.05$ و $100 = x_2$

$p(x<50) = p(x<x_1) = p(z<z_1) = \phi(z_1) \Rightarrow \phi(z_1) = 0.05$

$p(x>100) = 1 - p(x<100) = 1 - p(x<x_2) = 1 - p(z<z_2)$

$0.05 = 1 - p(z<z_2) \Rightarrow p(z<z_2) = 0.95 = \phi(z_2)$

$\phi(z_1) = 0.05$ ، $\phi(z_2) = 0.95$

نجد $z_1, z_2$ من الجدول فنجد أن $z_1 = -1.65$ و $z_2 = 1.65$

إذاً $\left.\begin{array}{l} \frac{50-\mu}{\sigma} = -1.65 \\ \frac{100-\mu}{\sigma} = 1.65 \end{array}\right\} \Rightarrow$ بالطرح $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 50-\mu = -1.65\sigma \\ 100-\mu = 1.65\sigma \end{array}\right\}$

$50 = 3.3\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = 15.15}$

$\Rightarrow \mu = 50 + 1.65(15.15) = 75$

لإيجاد المطلوب: $p(x<70)$:

$p(x<70) = p\left(z \le \frac{70-75}{15.15}\right) = p\left(z \le \frac{-5}{15.15}\right) = p(z \le -0.33)$

$= \phi(-0.33) = 0.0012$

$p(x<70 \mid 60<x<80) = \frac{p(x<70,\ 60<x<80)}{p(60<x<80)} = \frac{p(60<x<70)}{p(60<x<80)}$ (2)

$x_1 = 60 \Rightarrow z_1 = \frac{60-75}{15.15} = -0.66$

$x_2 = 70 \Rightarrow z_2 = -0.33$

$x_3 = 80 \Rightarrow z_3 = \frac{80-75}{15.15} = \frac{5}{15.15} = 0.33$

$60 \le x \le 70 \ (=) \ -0.66 \le z \le -0.33$

$70 \le x \le 80 \ (=) \ -0.33 \le z \le 0.33$

$p(x<70 \mid 60 \le x \le 80) = \frac{\phi(-0.33) - \phi(0.66)}{\phi(0.33) - \phi(-0.33)}$ بالتالي:

تمرين: X متغير عشوائي يتبع توزيعاً مستمراً منتظماً على المجال $]2,4[$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

1. اكتب دالة كثافته الاحتمالية ؟

2. أوجد $f(x \mid x<3)$ ؟

الحل: 1.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2} & ; \quad x\in ]2,4[ \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

2. نوجد بداية $F(x \mid x<3)$ حيث

$$F(x \mid x<3)=p(x\le x \mid x<3)=\frac{p(x\le x,\ x<3)}{p(x<3)}$$

1. $F(x \mid x<3)=\frac{p(2<x<3)}{p(2<x<3)}=1$ (الحدث اكيد) نميز حالتين: $x\ge 3$ ،

$x<3$ .

2. $F(x \mid x<3)=\frac{p(2<X<x)}{p(2<x<3)}$

لنحسب $p(2<X<x)$ من دالة الكثافة الاحتمالية

$$=\frac{\int_2^x \frac{1}{2}dt}{\int_2^3 \frac{1}{2}du}=\frac{\left[\frac{1}{2}t\right]_2^x}{\left[\frac{1}{2}u\right]_2^3}=\frac{\frac{1}{2}x-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{\frac{1}{2}(x-2)}{\frac{1}{2}(3-2)}=(x-2)$$

وبالتالي دالة الاحتمال المطلوبة:

$$f(x \mid x<3)=\begin{cases}0 & ; \quad x\ge 3 \\ 1 & ; \quad x\in ]2,3[ \\ 0 & ; \quad x\le 2\end{cases}$$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z