كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : السادسة/نظري/

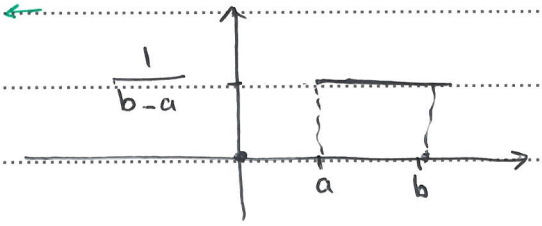
{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة:

1- التوزيع المنتظم المستمر: X متغير عشوائي مستمر يتبع توزيعاً احتمالياً منتظماً إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له تُعطى بالعلاقة: $f(x)=\frac{1}{b-a}$; $x\in[a,b]$

← لنتحقق من أن الدالة السابقة تمثل دالة كثافة احتمالية:



$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx=\frac{x}{b-a}\Big|_a^b=\frac{b-a}{b-a}=1$$

← حساب التوقع:

$$E(x)=\int_a^b x f(x)\,dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

$$E(x^2)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{b-a}\right]_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=$$

$$\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}\Rightarrow E(x^2)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\sigma^2=E(x^2)-\{E(x)\}^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+b^2}{4}=$$

$$\frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}}$$

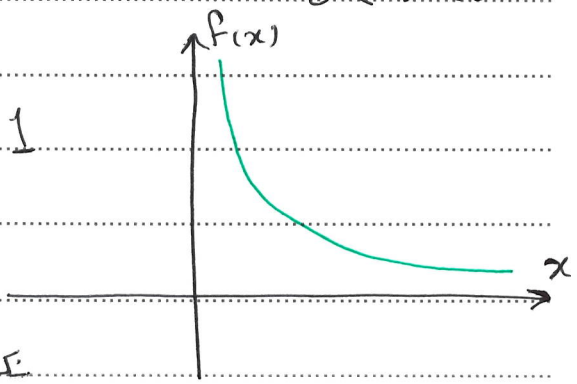
$$M_x(t)=E(e^{xt})=\int_a^b e^{xt}\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{t(b-a)}\left[e^{xt}\right]_a^b=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$$

2- التوزيع الأسي السالب: نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيعاً أسياً سالباً إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية معطاة بالشكل: $f(x)=\theta e^{-\theta x}$; $x>0$

$0 < x < \infty$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \theta . e^{-\theta x}\,dx = \left[-e^{-\theta x}\right]_0^\infty =$$

$$-e^{-\theta(\infty)} - (-e^0) = -e^{-\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$



• حساب التوقع:

$$E(x) = \int_0^\infty x . \theta . e^{-\theta . x}\,dx = I$$

تكامل بالتجزئة:

$x = u \qquad \theta . e^{-\theta x}\,dx = dv$

$dx = du \qquad -e^{-\theta x} = v$

$$I = [u.v]_0^\infty - \int_0^\infty v\,du = \left[-x . e^{-\theta x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\theta x}\,dx$$

$$I = -x . e^{-\theta x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\theta x}\,dx = 0 + \int_0^\infty e^{-\theta x}\,dx = \left[-\frac{1}{\theta} . e^{-\theta x}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{\theta}(0) + \frac{1}{\theta} . e^{-\theta(0)} = \frac{1}{\theta}$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 . f(x) . dx = \int_0^\infty x^2 . \theta . e^{-\theta x}\,dx = I_1$$

تكامل بالتجزئة:

$u = x^2 \qquad dv = \theta . e^{-\theta x}\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = -e^{-\theta x}$

$$I_1 = \left[-x^2 . e^{-\theta x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\theta x}(2x)\,dx \Rightarrow$$

$$I_1 = 0 + 2\int_0^\infty x . e^{-\theta x}\,dx \Rightarrow I_1 = 0 + \frac{2}{\theta} . I = \frac{2}{\theta^2}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$

$$= \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

• دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = p(X < x) = \int_0^x f(t)\,dt =$$

$$\int_0^x \theta . e^{-\theta t}\,dt = \left[-e^{-\theta t}\right]_0^x = -e^{-\theta x} + 1 \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & ; \quad 0 < x < \infty \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

• الدالة المولدة للعزوم:

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \int_0^{\infty} e^{xt} \cdot \theta \cdot e^{-\theta x}\, dx = \theta \int_0^{\infty} e^{x(t-\theta)}\, dx = \frac{\theta}{t-\theta}\left[e^{x(t-\theta)}\right]_0^{\infty} = \frac{\theta}{t-\theta}\left[e^{-\infty} - e^{0}\right]$$

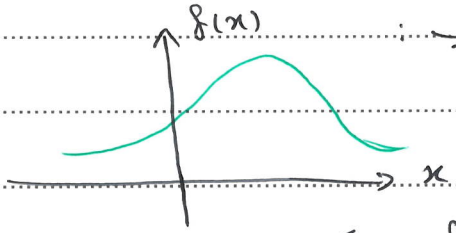
$$\boxed{M_x(t) = \frac{-\theta}{t-\theta}}$$

3. التوزيع الطبيعي:

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيعاً طبيعياً إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية معرفة بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

خطه البياني:



لبرهن أن f(x) دالة كثافة احتمالية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

نقوم بإجراء تغيير للمتحول حيث نفرض: عندئذٍ $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$dy = \frac{1}{\sigma}\, dx \Rightarrow dx = \sigma\, dy$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot \sigma\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot dy$$

نرمز $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$

$$A\cdot A = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz\right]$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2+z^2)} \cdot dy \cdot dz$$

نحول إلى الإحداثيات القطبية حيث:

$$y^2+z^2 = r^2 \qquad y = r\sin\theta \qquad z = r\cos\theta \qquad dy\cdot dz = r\cdot dr\cdot d\theta$$

عندما $-\infty < z < +\infty$ & $-\infty < y < +\infty$

$$\Rightarrow 0 < \theta < 2\pi \quad \& \quad 0 < r < +\infty$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r\, e^{-\frac{1}{2}r^2}\, dr\, d\theta$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} r\, e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^{\infty}\left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}\left[-e^{-\infty}+1\right]\left[2\pi-0\right] = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$A = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

النتيجة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx = 1 \quad ; \quad y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\,\sigma\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = \sqrt{2\pi}}$$ ← يُدعى تكامل غاوس.

• الدالة المولدة للعزوم:

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} e^{xt}\,dx$$

نفرض $\frac{x-\mu}{\sigma} = y$ بالتالي: $\boxed{x = \sigma y + \mu}$

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, e^{(\sigma y+\mu)t}\,dy$$

$$M_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma y t}\, e^{\mu t}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

$$M_x(t) = \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\sigma y t - y^2}{2}}\,dy$$

نضرب ونقسم على $e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$$M_x(t) = \frac{e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\, e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\sigma^2 t^2 + 2\sigma y t - y^2}{2}}\,dy$$

$$M_x(t) = \frac{e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma t)^2}\,dy$$

نفرض:

$$\begin{cases} y - \sigma t = \ell \\ dy = d\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\ell^2}\,d\ell \Rightarrow M_x(t) = \frac{e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$M_x(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2 + 2\mu t}{2}} \Rightarrow E(x) = M_x'(t) = (\sigma^2 t + \mu)\cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2 + 2\mu t}{2}}\Big|_{t=0}$$

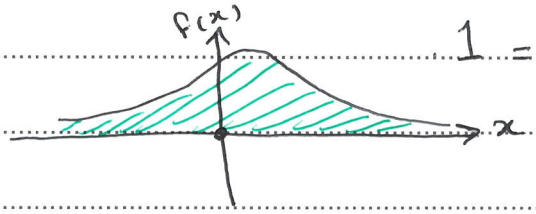
TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$E(x) = \mu$ & $E(x^2) = M_x''(t)\Big|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$

$Var(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$

$= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

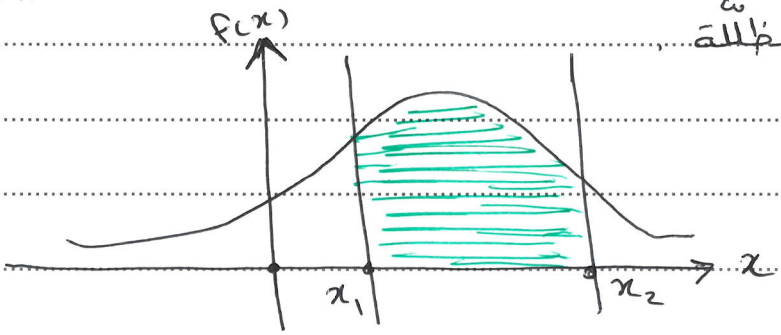
ملاحظة: [1] المساحة الواقعة بين الخط البياني لدالة الكثافة الاحتمالية والمحور الأفقي = 1



[2] $p(x_1 < X < x_2)$ نعطى بالعلاقة:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

ويعبر عن المساحة المظللة



انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة