كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

دوال التوزيع الاحتمالي المشروطة: Conditional Distribution Functions

أ) المتغير العشوائي المتقطع:

x متغير عشوائي يخضع لتوزيع احتمالي بدالة كتلة احتمالية $f(x)$.

دوال الكتلة الاحتمالية المشروطة:

$$f(x) = p(X=x) \quad ; \quad x \in \Omega$$

ولنفرض أن $A \subset \Omega$ عندئذٍ

$$F(x|A) = \frac{p(x \cap A)}{p(A)} = \begin{cases} 0 & ; \quad x \notin A \\ \dfrac{f(x)}{\sum_{y \in A} f(y)} & , \quad x \in A \end{cases}$$

ب) المتغير العشوائي المستمر:

x متغير عشوائي يخضع لتوزيع احتمالي دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$: $A \subset \Omega$ و Ω تطاق قيم المتغير العشوائي

a) نجد دالة التوزيع التراكمي المشروطة:

$$F(x|A) = p(X \leq x | A) = \frac{p(X \leq x, A)}{p(A)} = \frac{p[(X \leq x) \cap A]}{p(A)}$$

b) نشتق دالة التوزيع التراكمي المشروطة للحصول على دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة:

$$f(x|A) = \frac{dF(x|A)}{dx}$$

ملاحظة: 1) $F(x|A)$ تحقق خواص $F(x)$؛

$$\lim_{x \to \infty} F(x|A) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} F(x|A) = 0$$

$$F(x_1|A) - F(x_2|A) = p(x_2 < X < x_1 / A) \qquad x_2 < x_1$$

2) دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة تتمتع بنفس خواص دالة الكثافة الاحتمالية

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x|A)\,dx = 1$$

تمرين ينشر موقع انترنيت فيديوهات تتضمن تعليمات لإصلاح الدراجات. طول الفيديوهات بالدقائق يتبع توزيعاً احتمالياً بدالة كتلة احتمالية معطاة بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}0.15 & ; \quad x=1,2,3,4\\ 0.1 & ; \quad x=5,6,7,8\\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

يستخدم هذا الموقع نوعين من الخوادم. الأول للفيديوهات الأقل من 5 دقائق. والثاني للفيديوهات التي طولها على الأقل 5 دقائق. ماهي دالة الكتلة الاحتمالية. علماً أن الخادم الثاني هو المستخدم؟

الحل: A هو حدث اختيار الخادم الثاني

$$P(A)=0.1+0.1+0.1+0.1=0.4$$

$$f(x|A)=\frac{P(x|A)}{P(A)}=\begin{cases}\frac{f(x)}{\sum_{y\in A} f(y)}=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4} & ; \quad x\in A\\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

تمرين: X متغير عشوائي يرمز لعدد السنوات التي يعيشها الرجال بعد سن الـ 70 إذا كان الرجل يعاني من مشاكل في ضغط الدم [نرمز لهذا الحدث A] فإن X يتبع توزيعاً هندسياً بوسيط هو $p=0.1$

وإذا كان الرجل لايعاني من مشاكل في ضغط الدم [نرمز لهذا الحدث N] فإن X يتبع توزيعاً هندسياً بوسيط هو $p=0.05$

1- أوجد $f(x|A)$ و $f(x|N)$ ؟

2- أوجد دالة الكتلة الاحتمالية $f(x)$ إذا علمت أن 40% من الرجال يعانون من مشاكل في ضغط الدم بعد سن الـ 70.

الحل: [1] $f(x|A)=(0.1)(0.9)^{x-1}$; $x=1,2,3,\ldots$

$f(x|N)=(0.05)(0.95)^{x-1}$; $x=1,2,3,\ldots$

[2] $A\cap N=\phi$ و $A\cup N=S$ حيث S المجتمع المدروس

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حسب صيغة بيز الأولى: $f(x) = p(A) \cdot f(x|A) + p(N) \cdot f(x|N)$

$= 0.4\,(0.1)(0.9)^{x-1} + 0.6\,(0.05)(0.95)^{x-1}$; $x = 1, 2, \dots$

تمرين: X متغير عشوائي يتبع توزيعاً احتمالياً مستمراً بدالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x & ; \ 1 < x < 5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

① أوجد $F(x|X>3)$ ؟

② أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية $f(x|X>3)$ ؟

الحل:

$$F(x|X>3) = \frac{P(X \le x, X>3)}{P(X>3)} = \frac{P(3<X\le x)}{P(X>3)} = \frac{F(x)-F(3)}{1-F(3)}$$

نقوم بإيجاد $F(x)$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{12}t\,dt = \frac{1}{24}t^2\Big|_1^x = \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}(x^2-1)$$

$$F(x|X>3) = \frac{\frac{1}{24}(x^2-1) - \frac{8}{24}}{1-\frac{8}{24}} = \frac{x^2-1-8}{16} = \frac{x^2-9}{16} \quad ; \ F(3) = \frac{8}{24}$$

$$F(x|X>3) = \begin{cases} 0 & ; \ x \le 3 \\ \frac{x^2-9}{16} & ; \ 3 < x < 5 \\ 1 & ; \ x \ge 5 \end{cases}$$

$$f(x|X>3) = \frac{dF(x|X>3)}{dx} = \begin{cases} \frac{x}{8} & ; \ 3<x<5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$ ✓

• التحويل في المتغيرات العشوائية:

أ. حالة المتغير العشوائي المتقطع: إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً بدالة كتلة احتمالية $f(x)$ وبفرض Y متغير عشوائي متقطع آخر يُعطى بالعلاقة $y = g(x)$ عندئذٍ فإن Y يتبع توزيعاً احتمالياً بدالة كتلة احتمالية

$$f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f_X(x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- حالة المتغير العشوائي المستمر: X متغير عشوائي بدالة كثافة احتمالية $f_x(x)$

و $Y=g(x)$ ، نميّز حالتين:

1- $g(x)$ تابع متزايد إذاً $Y \le y$ عندئذٍ $g^{-1}(Y) \le g^{-1}(y)$

$X \le x$

$$F_y(y) = p(Y \le y) = p(g^{-1}(Y) \le g^{-1}(y)) = p(X \le x) = F_x(x)$$

$$f_y(y) = \frac{d F_y(y)}{dy} = \frac{d F_x(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = f_x(x) \cdot \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

2- $g(x)$ تابع متناقص إذاً إذا كان $Y \le y$ عندئذٍ $g^{-1}(Y) \ge g^{-1}(y)$

$X \ge x$

$$\Rightarrow F_y(y) = p(Y \le y) = p(X \ge x) = 1 - p(X < x) = 1 - F_x(x)$$

$$f_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} = \frac{d(1 - F_x(x))}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{dF_x(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} =$$

$$- f(x) \cdot \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

لدمج الحالتين $\quad f_y(y) = f_x^{-1}(y) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$

تمرين:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(x+3) & ; \quad 1 < x < 3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

Y متغير عشوائي يعرّف بالشكل: $y = g(x) = 5x + 3$.

Z متغير عشوائي آخر معرّف بالشكل: $z = h(x) = -3x$.

الحل: $g^{-1}(y) = \frac{y-3}{5}$

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{d\left(\frac{y-3}{5}\right)}{dy} \right| = \frac{1}{10}\left[\left(\frac{y-3}{5}\right)+3\right] \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$f_y(y) = \frac{1}{250}(y+12) \quad ; \quad 8 < y < 18 \quad \text{و} \quad 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f_Z(z) = f(h^{-1}(z)) \cdot \left| \frac{d[h^{-1}(z)]}{dz} \right| = \frac{1}{10}\left[-\frac{z}{3}+3\right] \cdot \left|-\frac{1}{3}\right|$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{30}\left(-\frac{z}{3}+3\right) & ; \quad -9 < z < -3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تمرين: X متغير عشوائي متقطع يتبع توزيعاً منتظماً على المجال $\{1, \dots, n\}$ دالة كتلته الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; \quad x \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

نعرّف $y = x + a$ عندئذٍ

$$y \in \{a, \dots, a+n\}$$

$$f_Y(y) = f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; \quad y \in \{a+1, \dots, a+n\} \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تمرين: X متغير عشوائي متقطع يتبع توزيعاً منتظماً على المجال: $\{-n, \dots, 0, \dots, n\}$

دالة كتلته الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & ; \quad x \in \{-n, \dots, +n\} \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

Y متغير عشوائي يعطى بالعلاقة $Y = |X|$ $\quad y \in \{0, \dots, n\}$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f(x)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & ; \quad y \in \{1, \dots, n\} \\ \frac{1}{2n+1} & ; \quad y = 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة