كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة:

- توزيع ثنائي الحد السالب: نقول إنّ x متغيّر عشوائي متقطع يتبع توزيع ثنائي الحد السالب إذا كانَ x يرصد عدد المرات اللازمة لإعادة تجربة لها في كل مرّة إعادة لتجربتين متنافيتين فقط هما نجاح أو فشل وذلك للحصول على r مرة نجاح علماً أنّ نتائج التجربة عند كل إعادة مستقلة عشوائياً.

دالة الكتلة الاحتمالية تُعطى بالشكل: $F(x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{x-r}$; توافيق

$x = r, r+1, r+2, \dots$

• دالة المولدة للعزوم:

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=r}^{\infty} e^{xt} \binom{x-1}{r-1} p^r \cdot q^{x-r}$$

$$= e^{rt} \cdot p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} \cdot e^{-rt} \cdot e^{xt} \cdot q^{x-r}$$

$$= e^{rt} \cdot p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} \cdot e^{t(x-r)} \cdot q^{(x-r)}$$

$$= e^{rt} \cdot p^r \sum_{x-r=0}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} (e^t \cdot q)^{x-r}$$

إذا عرضنا $x - r = 0$ إذاً $x = y + r$

$$M_y(t) = e^{rt} \cdot p^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+r-1}{r-1} (e^t \cdot q)^y$$

هي المتسلسلة متقاربة بشرط $|e^t \cdot q| < 1$

$$\sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+r-1}{r-1} [e^t \cdot y]^y = (1 - e^t \cdot q)^{-r}$$

$$\Rightarrow M_x(t) = e^{rt} \cdot p^r (1 - e^t \cdot q)^{-r}$$

$$M_x(t) = \frac{e^{rt} \cdot p^r}{(1 - e^t \cdot q)^r} = \left(\frac{e^t \cdot p}{1 - e^t \cdot q} \right)^r$$

$$M'_x(t) = \frac{r \cdot p^r \cdot e^{t \cdot r}}{(1 - q \cdot e^t)^{r+1}} \Bigg|_{t=0} = \frac{r}{p} \Rightarrow \mu = M'_x(0) = \frac{r}{p}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$

$$E(x^2) = M_x''(t)\Big|_{t=0}$$

$$M_x''(t) = \frac{r \cdot p^r \cdot e^{tr}(r+q \cdot e^t)}{(1-q \cdot e^t)^{r+2}}\Big|_{t=0} = \frac{r(r+q)}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{r(r+q)}{p^2} - \frac{r^2}{p^2} \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \frac{r \cdot q}{p^2}}$$

التوزيع المنتظم المتقطع:

x متغيّر عشوائي يخضع للتوزيع المنتظم المتقطع إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية المتعلقة بها تُعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & ; \quad x = 1, 2, \dots, N \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث $N \in \mathbb{N}$

دالة التوزيع التراكمي (التجميعي): cumulative Distribution Function

$$p(X \le x) = F(x) = \sum_{i=1}^{x} \frac{1}{N} = \frac{x}{N} \quad ; \quad x \in \{1, \dots, N\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ \frac{x}{N} & ; \quad x \in \{1, \dots, N\} \\ 1 & ; \quad x > N \end{cases}$$

• التوقع:

$$E(x) = \sum_{x=1}^{N} x \cdot f(x) \Rightarrow E(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{x}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{x=1}^{N} x$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{N+1}{2}}$$

• التباين:

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{N} x^2 \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{x^2}{N}$$

$$E(x^2) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \Rightarrow \boxed{E(x^2) = \frac{(1+N)(2N+1)}{6}}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2 = \frac{(1+N)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \frac{N^2-1}{12}}$$

• الدالة المولدة للعزوم:

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{xt} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{x=1}^{N} (e^t)^x \quad |e^t| < 1$$

$$\boxed{M_x(t) = \frac{e^t}{N} \cdot \frac{1-e^{Nt}}{1-e^t}}$$

تمرين: نرمي مجرى نرد معاً، يربح الراعي إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين زوجي ويخسر إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين خلاف ذلك. جانوع التوزيع الاحتمالي؟ أوجد احتمال الربح واحتمال الخسارة؟

الحل: Y متغير عشوائي يدل على مجموع الوجهين الظاهرين:

$Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
g(Y)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

$X = \{1, 0\}$; $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; x = 1 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

x متغير عشوائي يأخذ القيمة 1 للربح (مجموع الوجهين زوجي) ويأخذ القيمة 0 للخسارة (مجموع الوجهين فردي)

$f(1) = g(2) + g(4) + g(6) + g(8) + g(10) + g(12)$

$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$f(0) = g(3) + g(5) + g(7) + g(9) + g(11)$

$= \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

التوقع: $E(x) = M = p = \frac{1}{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اسم التوزيع	دالة الكتلة الاحتمالية	التوقع	التباين
توزيع برنولي	$f(x)=\begin{cases} p & ; x=1 \\ q=1-p & ; x=0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$	$E(x)=\mu=p$	$\sigma^2=p\cdot q$
توزيع ثنائي الحدّ	$F(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x q^{n-x}$ $x\in\{0,1,\dots,n\}$	$E(x)=\mu=n\cdot p$	$\sigma^2=n\cdot p\cdot q$
التوزيع بواسون	وسطه μ $f(x)=e^{-\mu}\cdot\mu^x$ $x\in\{0,1,2\dots\}$	$E(x)=\mu$	$\sigma^2=\mu$
توزيع ثنائي الحد السالب	$f(x)=\binom{x-1}{r-1}\cdot p^r q^{x-r}$ $x=r,r+1,\dots$	$\mu=\frac{r}{p}$	$\sigma^2=\frac{r\cdot q}{p^2}$
التوزيع المنتظم المتقطع	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{N} & ; x=1,\dots,N \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$	$\mu=\frac{N+1}{2}$	$\sigma^2=\frac{N^2-1}{12}$
التوزيع الهندسي	$f(x)=p(1-p)^{x-1}$ $x=1,2,\dots$	$E(x)=$ $\mu=\frac{1}{p}$	$\sigma^2=\frac{1-p}{p^2}$
التوزيع الهندسي الفوقي	$f(x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $x\in\{0,\dots r\}$	$\mu=\frac{n\cdot r}{N}$	$\sigma^2=n\binom{r}{N}\binom{N-r}{N}\binom{N-r}{N-n}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

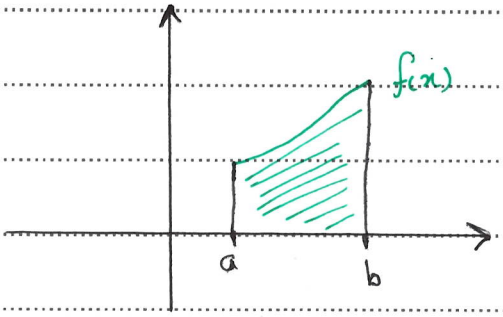
• المتغيرات العشوائية المستمرة :

- المتغير العشوائي المستمر : هو المتغير الذي يأخذ قيماً متصلة مثل الأوزان - المسافات - الأطوال لايمكن ايجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة محددة بذاتها ولكن يمكن أن نحسب احتمال وقوعه ضمن نطاق معين من القيم داخل مجال تعريفه

- تُدعى الدالة المعبرة عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر دالة الكثافة الاحتمالية وتعرّف بالشكل :

$$f:]a,b[\to [0,1]$$

تحقق الخواص التالية :



1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = 1$
3. $p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \quad x_1 < x_2$

ملاحظة : يتم حساب كل من التوقع والتباين للمتغير العشوائي المستمر بصورة مشابهة للمتغير العشوائي المتقطع ويكن بأخذ التكامل بدلاً من المجموع

$$\mu = E(x) = \int_a^b x\, f(x)\,dx$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2 \Rightarrow \mu_x(t) = E(e^{xt}) = \int_a^b e^{xt} \cdot f(x)\,dx$$

• دالة التوزيع التراكمي cumulative Distivbution function

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

حيث x متغير عشوائي مستمر ومعرف على $]a,b[$ حيث $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

خواص : 1. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ و $\lim_{x \to -\infty} = 0$

2. $F(x)$ دالة متزايدة بالنسبة للمتغير x أي أنه إذا كان $x_1 < x_2$ فإن : $f(x_1) < f(x_2)$

3. $p(x_1 \leq X \leq x_2) = f(x_2) - F(x_1)$

4. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ دالة التوزيع الاحتمالي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$P(X > x) = 1 - F(x)$ [5]

سؤال وظيفة | X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(x+a) & ; \quad 1 < x < 3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك.} \end{cases}$$

[1] أوجد a ؟

[2] لتكن $Y = 5X + 3$ و $Z = -3X$ متغيران عشوائيان جديدان أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المتعلقة بكل من Y و Z

انتهت الحاجزة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z