كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• بعض التوزيعات المتقطعة الخاصة

1) توزيع برنولي: في تجربة ما إذا كان لدينا نتيجتين ممكنتين فقط هما الربح أو الخسارة بحيث أن احتمال الربح هو p واحتمال الخسارة هو $q=1-p$ في هذه الحالة نقول إن المتغير العشوائي x يخضع لتوزيع برنولي وقيمه هي $X=\{0,1\}$ بدالة كتلة احتمالية هي:

$$f(x)=\begin{cases} p & ; x=1 \\ q & ; x=0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الدالة المولدة للعزوم في هذه الحالة:

$$M_x(t)=E(e^{xt})=\sum_{x=0,1} e^{xt}\cdot f(x)=e^{0.t}\cdot q+e^{t}p=q+p\cdot e^{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_x(t)=(1-p)+p\cdot e^{t}}$$

$$M_x'(t)=p\cdot e^{t} \Rightarrow \boxed{\mu=M_x'(0)=p} \qquad M_x''(t)=p\cdot e^{t} \Rightarrow \boxed{M_x''(0)=p}$$

$$\sigma^2=M_x''(0)-[M_x'(0)]^2 \Rightarrow \sigma^2=p-p^2=p(1-p)=p\cdot q$$

$$\boxed{\sigma^2=p\cdot q}$$

2) التوزيع ثنائي الحد: x متغير عشوائي يخضع لتوزيع ثنائي الحد إذا كان يرصد عدد مرات النجاح خلال n تكرار لتجربة ما لها نتيجتان متنافيتان هما الربح p أو الخسارة q.

دالة الكتلة الاحتمالية: $f(x) = \binom{n}{x} p^x . q^{n-x}$; $x = 0, 1, \dots, n$

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=0}^{n} e^{xt} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$M_x(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t . p) . q^{n-x} \Rightarrow M_x(t) = (e^t . p + q)^n$$

$$M_x'(t) = n(e^t . p + q)^{n-1} . p . e^t \Rightarrow M_x'(0) = \mu = n . p (p+q)^{n-1}$$

$$\boxed{\mu = n . p}$$

$$M_x''(t) = n . p . e^t (e^t . p + q)^{n-1} + n . p . e^t (n-1) e^t . p (e^t . p + q)^{n-2}$$

$$\boxed{M_x''(0) = n . p + n p^2 (n-1)}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2 \Rightarrow \sigma^2 = np + n^2 p^2 - np^2 - n^2 p^2$$

$$\sigma^2 = np - np^2 \Rightarrow \sigma^2 = np(1-p) \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = npq}$$

3) توزيع بواسون: X متغير عشوائي يخضع لتوزيع بواسون إذا كان يرصد عدد مرات تكرار حدث معين خلال مدة زمنية معينة وبحيث أن هذا الحدث نادر الحدوث.

دالة الكتلة الاحتمالية: $f(x) = \dfrac{e^{-\mu} . (\mu)^x}{x!}$; $x = 0, 1, \dots$

فرضيات هذا التوزيع: μ ثابت

1- نتحقق من أن f دالة كتلة احتمالية

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{-\mu} . e^{\mu} = e^0 = 1$$

2- الدالة المولدة للعزوم

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} . \frac{e^{-\mu} . \mu^x}{x!} = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t . \mu)^x}{x!}$$

$$M_x(t) = e^{-\mu} . e^{e^t . \mu} \Rightarrow M_x(t) = e^{(e^t . \mu - \mu)}$$

$$M_x(t) = e^{\mu(e^t - 1)} \Rightarrow M_x'(t) = \mu . e^t . e^{\mu(e^t - 1)}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$M'_x(0) = \mu . e^{\mu(1-1)} \Rightarrow \mu'_x(0) = \mu$

$M''_x(t) = \mu . e^t . e^{\mu(e^t-1)} + \mu^2 e^{2t} . e^{\mu(e^t-1)}$

$\boxed{M''_x(0) = \mu + \mu^2}$

$\sigma^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2 \Rightarrow \sigma^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \mu}$

نظرية: يؤول توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون إذا كانت p صغيرة و $(n \to \infty)$

الإثبات:

$f(x) = \binom{n}{x} . p^x (1-p)^{n-x} \qquad \mu = n . p \Rightarrow p = \frac{\mu}{n}$

$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\binom{n}{x} . \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x} \right] =$

$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n(n-1) \dots (n-x+1)}{x!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x . \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x} \right] =$

$\left(\frac{\mu}{x!}\right) . \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n(n-1) \dots (n-x+1)}{n^x} . \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x} \right]$

$= \frac{\mu^x}{x!} . \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x} \right] \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}}$

← وهي دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع بواسون

4. التوزيع الهندسي: المتغير العشوائي الذي يتبع توزيعاً هندسياً يرصد عدد المرات اللازمة لتكرار تجربة حتى الوصول إلى أول نجاح علماً أن هذه التجربة نتيجتان متنافيتان p النجاح و q الفشل.

$f(x) = (1-p)^{x-1} . p \qquad ; \quad x = 1, 2, \dots$

نجد الدالة المولدة للعزوم:

$M_x(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt} (1-p)^{x-1} . p = e^t . p \sum_{x=1}^{\infty} [e^t (1-p)]^{x-1}$

$\boxed{M_x(t) = \frac{e^t . p}{1 - e^t(1-p)}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$M_x'(t) = \frac{p.e^t[1-e^t(1-p)] + p(1-p).e^{2t}}{[1-e^t(1-p)]^2}$$

$$M_x'(0) = \frac{p(1-1+p)+p(1-p)}{(1-1+p)^2} = \frac{p^2+p-p^2}{p^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$M_x''(t) = \frac{1+(1-p)}{p^2.e^{3t}} \Rightarrow M_x''(0) = \frac{1+(1-p)}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2} \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \frac{q}{p^2}}$$

[5] التوزيع الهيبر جيومتري: يرمز احتمال y نجاح عندما نقوم بسحب عيّنة مكوّنة من n عنصر دون إعادة من مجتمع حجمه N عنصر حيث يوجد r مرة نجاح في هذا المجتمع

$$f(y) = \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z