كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمال

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعاتها الاحتمالية

The Random vaviables and their discrete probability distvibution

إنّ النتائج التي نحصل عليها عند القيام بتجربة عشوائية ما إما تكون عددية أو أن تكون نوعية. المتغير العشوائي: هو متغير يأخذ قيماً حقيقية مختلفة تعبّر عن فضاء العيّنة أي يمكننا القول أنّ المتغير العشوائي ما هو إلّا دالة تعطي عناصر فضاء العينة قيماً عددية حقيقية يكون المتغير العشوائي إمّا متقطع أو مستمر

• المتغيرات العشوائية المتقطعة: هي المتغيرات العشوائية التي تأخذ قيماً متباعدة

مثلاً: عدد مرات ظهور الوجه H عند رمي قطعتي نقود $H=\{x=0,1,2\}$

• التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع:

وهو دالة تعبّر عن احتمالات حدوث القيم التي يأخذها المتغير العشوائي: إذا كان $X=\{x_1,\dots\}$ فإنّ $p(X=x_i)=f(x_i)$

X	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
⋮	⋮ $\sum f(x_i)=1$

نسمي $f(x)$ دالة الكتلة الاحتمالية المتعلقة بالمتغير العشوائي المتقطع x وهي تحقق الشروط التالية

1- $0 \le f(x) \le 1$ لكل $x \in X$

2- $\sum f(x)=1$

3- $p(x \in A)=\sum_{x \in A} f(x)$ حيث $A \subseteq \Omega$

TEL:0931497960 - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - مكتبة A to Z

إنّ أي دالة تحقق الشروط ① و ② و ③ تُدعى دالة كتلة احتمالية

• دالة التوزيع الاحتمالي التجميعية أو (التراكمية)

cummulative distribution function

يرمز لهذه الدالة $F(x)$ ويعبر عنها بالشكل $F(x)=p(x_i\le x)=\sum_{x_i\le x} f(x_i)$

تحقق هذه الدالة الشروط التالية:

1- $0\le F(x)\le 1$

2- $F(x)$ دالة غير متناقصة $x_1\le x_2$ فإنّ $f(x_1)\le F(x_2)$

لبرهنة: $F(x_1)=p(x\le x_1)\le p(x\le x_2)=f(x_2)$

$x_1\le x_2$ بما أنّ

3- $F(-\infty)=0$ و $F(\infty)=1$

ملاحظة: $p(X>x)=1-p(X\le x)=1-F(x)$

• التوقع الرياضي وخواصّه mathematical expectation:

X متغير عشوائي متقطع دالة كتلته الاحتمالية $f(x)$ عندئذٍ التوقع الرياضي

$E(x)=\sum_{x_i\in R_x} x_i\cdot f(x_i)$ حيث R_x هي مجموعة قيم المتغير العشوائي بفرض

أنّ $U(x)$ دالة عندئذٍ $E\{U(x)\}=\sum_{x_i\in R_x} U(x_i)\cdot f(x_i)$

• خواص التوقع الرياضي:

1- $E(c)=c$ لأنّ: $E(c)=\sum c\cdot f(x_i)=c\sum f(x_i)=c$

2- c ثابت و $U(x)$ دالة عشوائية $E\{c\cdot U(x)\}=c\cdot E\{U(x)\}$

لأنّ: $\sum_{x\in R_x} c\cdot U(x)\cdot f(x)=c\cdot\sum_{x\in R_x} U(x)\cdot f(x)=c\cdot E\{U(x)\}$

3- إذا كانت $c_1,\dots,c_k$ ثوابت

و $U_1(x),\dots,U_k(x)$ دوال

$E\{\sum c_i\cdot U_i(x)\}=\sum c_i\cdot E\{U_i(x)\}$

ملاحظة: إنّ الوسط الحسابي إحصائياً لمتغير عشوائي ما X هو التوقع الرياضي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لهذا المتغيّر أي $\mu = E(x)$

• التّباين Variance : يرمز لهُ σ^2 وهو يمثّل متوسطاً لانحراف قيم المتغيّر العشوائي عن الوسط الحسابي μ

$$Var(x) = E\{(X-\mu)^2\} = \sum_{x \in R_x} (x-\mu)^2 \cdot f(x)$$

$$= \sum_{x \in R_x} (x^2 - 2x\mu + \mu^2) \cdot f(x)$$

$$= \sum_{x \in R_x} x^2 f(x) - 2\mu \sum_{x \in R_x} x f(x) + \mu^2 \sum_{x \in R_x} f(x)$$

$$\sum x f(x) = \mu \qquad \sum f(x) = 1$$

$$= E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$

• الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{Var(x)}$

* خواص: 1- لأنّ : $E(X-\mu) = 0$

$$E(X-\mu) = \sum (x-\mu) f(x) = \sum x f(x) - \mu \sum f(x) = \mu - \mu = 0$$

2- X متغيّر عشوائي تبايينه $Var(X)$

$$Var(X+c) = E\{(x+c)^2\} - \{E\{(x+c)\}\}^2$$

ولكن $Var(X+c) = E\{[(X+c) - E(x+c)]^2\}$ أو يمكن كتابته بالشكل:

$$E(X+c) = \sum (x+c) f(x) = \sum x f(x) + c \sum f(x) = E(x) + c$$

وبالتّالي : $Var\{(x+c)\} = E\{[(x+c) - E(x+c)]^2\} =$

$$E\{[x+c - E(x) - c]^2\} = E\{[x - E(x)]^2\} = Var(x)$$

3- $Var(cx) = E\{[cx - E(cx)]^2\} = E\{[cx - c \cdot E(x)]^2\}$

$$= c^2 \cdot E\{(x - E(x))^2\} = c^2 \cdot Var(x)$$

4- X متغيّر عشوائي توقّعهُ μ وانحرافه المعياري σ نعرّف $X^* = \frac{x-\mu}{\sigma}$

لأنّ : $E(x^*) = 0$, $Var(x^*) = 1$ حيث :

$$E(x^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}(E(x) - \mu) = 0$$

ولدينا $Var(x^*) = Var\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = E\left\{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}^2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= E\left\{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot E\{(x-\mu)\}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$

تعريف: إذا كانَ x متغيراً عشوائياً و r عددٌ صحيحٌ موجبٌ عندئذٍ $\mu'_r = E(x^r)$ وهو العزم حول نقطة الأصل من الرتبة r أي: r^{th} moment around the origin

و $\mu_r = E\{(x-\mu)^r\}$ وهو العزم المركزي من الرتبة r r^{th} central moment

- ملاحظة: $\mu = \mu'_1$ و $\sigma^2 = \mu_2$

- الدالة المولدة للعزوم: $M_x(t)$ The moment generating function

$M_x(t) = E\{e^{xt}\} =$ x متغير عشوائي متقطع دالة كتلته الاحتمالية له $f(x)$

$\sum e^{xt} \cdot f(x)$

$M_x^{(r)} = \sum x^r e^{xt} \cdot f(x)$ إن المشتق من الرتبة r للدالة المولدة للعزوم

أصبح لدينا $\mu = E(x) = M'_x(0)$ أي: $\sigma^2 = M''_x(0) - \{M'_x(0)\}^2$

- التحويل في المتغيرات العشوائية المتقطعة:

x متغير عشوائي دالة كتلته الاحتمالية $f(x)$ نعرف المتغير العشوائي Y بالشكل $Y = g(x)$ عندئذٍ قيمة $Y_i = g(x_i)$ عندئذٍ $x = g^{-1}(y)$ حيث $f_y(y) = f_x(x)$

تمارين: التمرين (1): x متغير عشوائي يرمز للوجه الظاهر على حجر نرد عند رميه مرة واحدة تم المتغير العشوائي x هي: $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$ عندئذٍ:

$f(x) = \frac{1}{6}$; $x = \{1, 2, \ldots, 6\}$

$E(x) = \sum x f(x) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3.5$

التمرين (2): بيطر منفدع يقف عند نقطة الأصل على مستقيم الأعداد ويترك قفزاً إلى اليسار باحتمال $\frac{1}{10}$ وإلى اليمين باحتمال $\frac{9}{10}$ علماً أنّ قفزاته تشكل وحدات كاملة وبصورة مستقلة. x متغير عشوائي يدل على موقع المنفدع بيطر بعد قفزتين متتاليتين المطلوب: أوجد قيم المتغير العشوائي x ودالة الكتلة الاحتمالية له وتوقعه.

$R_x = \{0, 2, -2\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(x=-2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

$f(x=2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{100}$

$f(x=0) = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100} + \frac{9}{100} = \frac{18}{100}$

التوقع:

$E(x) = \sum x \cdot f(x)$

$= -2\left(\frac{1}{100}\right) + 2\left(\frac{81}{100}\right) + 0\left(\frac{18}{100}\right) = \frac{-2}{100} + \frac{162}{100} = \frac{160}{100} = 1.6$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} & ; \ x=-2 \\ \frac{81}{100} & ; \ x=2 \\ \frac{18}{100} & ; \ x=0 \end{cases}$$

التمرين (3): X متغير عشوائي متقطع دالة كتلته الاحتمالية معطاة بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & ; \ x = 1, 2, \dots, 10 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

Y متغير عشوائي آخر معطى بالعلاقة: $Y = 3x + 2$ أوجد $f_Y(y)$ ؟

الحل: لدينا $f_Y(y) = f_X(x)$ حيث $x = g^{-1}(y)$

$$X = \frac{Y-2}{3}$$

$y_1 = 3(1)+2 = 5 \quad y_2 = 3(2)+2 = 8 \quad \dots \quad y_{10} = 32$

$\Rightarrow Y = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32\}$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{55}\left(\frac{y-2}{3}\right) & ; \ y \in Y \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغيرين العشوائيين X و Y ؟

$F(x) = p(X \le x) = \sum_{x_i} f(x_i)$

$$f(x) = \sum_{1}^{x} \frac{x}{55} = \sum_{\substack{1 \\ x_i \le x}}^{x} \frac{1}{55} x = \frac{1}{55} \cdot \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{110} \ ;$$

$x \in \{1, \dots, 10\}$ وإلا

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

A to Z LIBRARY — FOR UNIVERSITY SERVIC

$$F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<1\\ \dfrac{x(x+1)}{110} & ; \quad x\in\{1,2,\ldots,10\}\\ 1 & ; \quad x\geq 10\end{cases}$$

وبالنسبة للمتغير العشوائي Y :

$$F(Y)=\begin{cases}0 & ; \quad y<5\\ \dfrac{1}{110}\left(\dfrac{y-2}{3}\right)\left(\dfrac{y+1}{3}\right) & ; \quad y\in Y=\{5,\ldots,32\}\\ 1 & ; \quad y\geq 32.\end{cases}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z