كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمال

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

• تعاريف أساسيّة:

- فضاء العينة: هو المجموعة التي تحوي جميع نتائج التجربة العشوائية
مثال: عند رمي حجر النرد فضاء العينة هو $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- الفضاء الاحتمالي المتساوي الاحتمالات:
هو فضاء احتمالي تتساوى احتمالات عناصره.

- الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة أي $A \subseteq \Omega$
«إن كانت هذه المجموعة وحيدة العنصر فإنّ الحدث بسيط، وإذا كانت خالية من العناصر فإنّ الحدث مستحيل وإذا كانت $A = \Omega$ فإنّ الحدث أكيد وإذا A تحوي أكثر من عنصر فإنّ الحدث مركب.»

- الأحداث المنفصلة: (disjoints Events):
A و B حدثان منفصلان $\Longleftrightarrow$ $A \cap B = \Phi$

- الأحداث المرتبطة: A و B حدثان مرتبطان فإنّ $\Longleftrightarrow$ $A \cap B \neq \Phi$

- الاحتمال البسيط: Simple probability
في فضاء احتمالي متساوي الاحتمالات بفرض أنّ $A \subseteq \Omega$ وأنّ $|A| = m$
و $|\Omega| = n$ عندئذٍ فإنّ $p(A) = \frac{m}{n}$

- المبدأ الأساسي في العد: Basic principle of counting
إذا كانت تجربة ما مكونة من r مرحلة بحيث أنّ المرحلة الأولى لها m_1 نتيجة ممكنة والمرحلة الثانية لها m_2 نتيجة ممكنة ...... والمرحلة r لها m_r نتيجة ممكنة، إنّ عدد النتائج الممكنة للتجربة ككُل هي:

$m = m_1 . m_2 . m_3 .... m_r$

• ملاحظة: إنّ عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب عناصر مجموعة مكونة من n عنصر هي

$n(n-1)(n-2) .... 3 \times 2 \times 1 = n!$

التراتيب permutations :

تعرّف بأنّها عدد الطرق التي يمكن بها أن نختار k عنصراً مركباً من مجموعة فيها n عنصر

$$p(n,k) = n.(n-1) ...... (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- التوافيق combirataries

تعرّف بأنّها عدد الطرق التي يمكن بها أن نختار مجموعة جزئية ذات k عنصر من مجموعة فيها n عنصر

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

لفهم المساواة السابقة نفترض بداية أن الترتيب له أهمية

$$p(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow p(n,k) = c(n,k).k!$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!} = c(n,k).k!$$

وبالتالي

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- بديهيات علم الاحتمال : Axioms of probability :

Ω فضاء العينة

f مجموعة الأحداث { أسرة المجموعات الجزئية من فضاء العينة }

p: هو عدد حقيقي يلحق بكل حدث ويعبّر عن احتمال وقوعه

• الفرضية 1 (1 Axiom) $1 \geq p(A) \geq 0$

• Axiom 2 : $p(\Omega) = 1$

• Axiom 3 : مجموعة غير منتهية من الأحداث المنفصلة مثنى مثنى عندئذٍ فإنّ

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

نتائج: ① $p(\Phi) = 0$

الاثبات: إنّ Φ و Ω حادثتان منفصلتان حسب Axiom 3

$p(\Omega) = p(\Omega \cup \phi) = p(\Omega) + p(\phi) \Rightarrow 1 = 1 + p(\phi)$

$p(\phi) = 1 - 1 = 0$

② إن الحدث المتمم لحدث ما $A \subseteq \Omega$ يرمز له A^c أي $A^c = \Omega \setminus A$

إن $p(A^c) = 1 - p(A)$ وببساطة لأنه A و A^c حدثان منفصلان

$p(\Omega) = p(A \cup A^c) = p(A) + p(A^c)$

$1 = p(A) + p(A^c) \Rightarrow p(A^c) = 1 - p(A)$

③ $A \subseteq B$ فإنه $p(B) \geq p(A)$ لدينا:

$B \setminus A$ و A حدثان منفصلان $B = (B \setminus A) \cup A$

$p(B) = p(B \setminus A) + p(A)$

وبحسب Axiom 1 $p(B \setminus A) \geq 0 \Longrightarrow p(B) \geq p(A)$

④ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

لأن $p(A \cup B) = p(B \setminus A) + p(A \cap B) + p(A \setminus B)$

$= p(B) - p(A \cap B) + p(A \cap B) + p(A) - p(A \cap B)$

$= p(B) + p(A) - p(A \cap B)$

بنفس الطريقة يمكن أن نبرهن أنه

$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_1 \cap A_2) - p(A_1 \cap A_3) - p(A_2 \cap A_3) + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} p(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i,j,k \leq n} p(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} \cdot p(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$

• الاحتمال الشرطي:

واضح تماماً أنه وبتوفر معلومات إضافية عن تجربة ما فإن احتمال وقوع حدث ما قد يتغير في حال كانت هذه المعلومات الإضافية مرتبطة بشكل مباشر

في هذا الحدث $p(A|B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A\cap B) = p(A|B)\,.\,p(B)$

• صيغة بيز الأولى : first Bays formula

بفرض أنّ f_n ,..... , f_1 أحداث منفصلة مثنى مثنى (pairwise disjoint fuents) وأنّ $f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_n = \Omega$

و $A \in \Omega$ حدث ما عندئذٍ فإنّ

$$p(A) = p(f_1).p(A|f_1) + p(f_2).p(A|f_2) + \dots + p(f_n).p(A|f_n)$$

الاثبات

$$P_2 = p(A\cap f_1) + p(A\cap f_2) + \dots + p(A\cap f_n)$$

انّ $(A\cap f_n)$ و .... و $(A\cap f_1)$ بشكل أحداث منفصلة

$$P_2 = p[(A\cap f_1) \cup (A\cap f_2) \dots \cup (A\cap f_n)]$$

$$P_2 = p[A\cap (f_1\cup f_2 \cup \dots \cup f_n)] = p(A\cap \Omega) = p(\Omega) = P_1$$

• صيغة بيز الثانية :

f_n ..... f_1, f_2 أحداث منفصلة مثنى مثنى وتحقق أنّ $f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_n = \Omega$

$$p(f_j|A) = \frac{p(f_j\cap A)}{p(A)} = \frac{p(f_j).p(A|f_j)}{p(f_i).p(A|f_i) + \dots + p(f_n).p(A|f_n)}$$

• الاستقلال العشوائي

نقول عن حدثين A و B أنّهما مستقلان عشوائياً إذا كانَ $p(A\cap B) = p(A).p(B)$

• ملاحظة: إذا كان A و B مستقلان عشوائياً فإنّ A و B^c أيضاً هما حدثان مستقلان عشوائياً لأنّ

$$p(A\cap B^c) = p(A|B) =$$

$$p(A) - p(A\cap B) = p(A) - p(A).p(B)$$

$$= p(A)[1 - p(B)]$$

$$= p(A).p(B^c)$$

انتهت المحاضرة