كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

يُستخدم تحويل لابلاس لحلّ المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات الأمثال الثابتة حيث يحوّلها إلى معادلات جبرية. ويُستخدم لحلّ المعادلات التفاضلية الجزئية وذلك بتخفيض عدد المتحولات فيحوّلها إلى معادلات تفاضلية عادية.

حل المعادلة التفاضلية العادية → تطبيق تحويل لابلاس العكسي → حل معادلة جبرية → نطبق تحويل لابلاس → معادلة تفاضلية عادية

نعرّف تحويل لابلاس بالشكل: ليكن $f(x)$ تابع حيث $x \geq 0$ فيكون تحويل لابلاس لـ f مرمز بالشكل: $\mathcal{L}[f(x)]$ أو $F(s)$ إذاً:

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) = \hat{f}(s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)\, e^{-s(x)}\, dx$$

أو يُكتب بالشكل:

$$\int_0^{\infty} f(x).\, e^{-sx}\, dx$$

التكامل السابق هو تكامل معتل يمكن أن يكون متقارب أو متباعد عندما يكون التكامل المعتل متقارب يكون تحويل لابلاس موجود وإذا كان التكامل المعتل غير متقارب نقول إنّ التابع لا يملك تحويل لابلاس.

ملاحظة: هذا التحويل يعمل على الدوال المعرفة على $[0,\infty[$ فإنّه غالباً يُطبّق على المتغيّر t وهو أداة فعالة جداً لتحويل مسألة قيم ابتدائية حدية إلى معادلة جبرية والمعادلة التفاضلية الجزئية "مع شروط" إلى معادلة تفاضلية عادية

بعض خواص تحويل لابلاس:

١- الخطية:

$$\mathcal{L}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathcal{L}[f(x)] + c_2 \mathcal{L}[g(x)]$$
$$= c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

2- الخاصية الانسحابية

$$\mathcal{L}[e^{ax}.f(x)] = F(s-a)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}[e^{ax}.f(x)] = \int_0^\infty e^{ax}.f(x).e^{-sx}.dx = \int_0^\infty f(x).e^{-(s-a)x}dx = F(s-a)$$

3-

$$\mathcal{L}[x^n.f(x)] = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}.F(s)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}[x^n.f(x)] = \int_0^\infty x^n f(x).e^{-sx}.dx = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty f(x).e^{-sx}.dx = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}.F(s)$$

4-

$$\mathcal{L}[\frac{1}{x}.f(x)] = \int_s^\infty F(m).dm$$

البرهان:

$$\mathcal{L}[\frac{1}{x}.f(x)] = \int_0^\infty \frac{1}{x}.f(x).e^{-sx}dx = \int_0^\infty f(x)\int_0^\infty e^{mx}.dm.dx = \int_s^\infty \underbrace{\int_0^\infty f(x).e^{mx}.dx}_{F(m)}.dm = \int_s^\infty F(m).dm$$

5-

$$\mathcal{L}[\int_0^x f(m).dm] = \frac{1}{s}.F(s)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}[\int_0^x f(m).dm] = \int_0^\infty \int_0^x \underbrace{f(m).dm}_{u}.\underbrace{e^{-sx}.dx}_{dv} \rightarrow \text{تكامل بالتجزئة}$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-sx}\int_0^\infty F(m).dm\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}.e^{-sx}.f(x).dx = 0 + \frac{1}{s}.f(s)$$

6- تحويل لابلاس للتابع الأسي:

$$\mathcal{L}(e^{ax}) = \int_0^\infty e^{ax}.e^{-sx}.dx = \int_0^\infty e^{(a-s)x}dx = \left[\frac{1}{a-s}.e^{(a-s)x}\right]_0^\infty ; s>a = \frac{1}{s-a}$$

7-

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} ; s>0$$

8- بالاستفادة من الخاصية (3):

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2}$$

$$\text{وبالتالي } \mathcal{L}[x.1] = (-1)^1\frac{d}{ds}F(s) = \frac{1}{s^2}$$

9-

$$\mathcal{L}[x^n.e^{ax}] = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-a}\right) = (-1)^n.(-1)^n.\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

10. $\mathcal{L}(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$

11. $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

12. $\mathcal{L}[\sin ax] = \frac{a}{s^2+a^2}$; $s>0$

البرهان: نستخدم دساتير أولر:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{iax}] - \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{-iax}] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2ia}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

13. $\mathcal{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^2+a^2}$; $s>0$

14. $\mathcal{L}[e^{ax}\cos wx] = \frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$; $s>a$

15. $\mathcal{L}[e^{ax}\sin wx] = \frac{w}{(s-a)^2+w^2}$; $s>a$

16. $\mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{m^2+1}\,dm = \arctan(m)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s)$

• تحويل لابلاس العكسي:

هو تابع $f(x)$ بحيث $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. تقنية إيجاد التحويل العكسي تعتمد على الذاكرة وعلى الجداول. إذا كان $F(s)$ ليس بشكل معروف تحويله العكسي عندها نعيد كتابته حتى يصبح بشكل معروف

$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$

يتمتع تحويل لابلاس العكسي بصفة الخطية أي:

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F(s) + c_2 G(s)] = c_1\mathcal{L}^{-1}(F(s)) + c_2\mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

• قانون الالتفاف:

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-m)\,g(m)\,dm$$

كما يمكن كتابته بالشكل: $f*g = g*f$ (الالتفاف تبديلي).

كما أنه يتمتع بصفة التجميع $(f*g)*k = f*(g*k)$

وهو توزيعي على الجمع $f*(c_1 g + c_2 k) = c_1 f*g + c_2 f*k$

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$$

$$(f*g)(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)\,G(s))$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثلاً لو كان لدينا: $R(s) = \frac{1}{s^2-5s+6} = \frac{1}{(s-3)(s-2)} = \underbrace{\frac{1}{s-3}}_{F(x)=e^{3x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{g(x)=e^{2x}}$

$$\mathcal{L}^{-1}(R(s)) = \int_0^x e^{3(x-m)} \cdot e^{2m}\, dm$$

$$= \int_0^x e^{3x-m}\, dm = -e^{3x-m}\Big|_0^x = -e^{2x} + e^{3x}$$

• تحويل لابلاس للمشتقات:

$$\mathcal{L}(y_x) = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}(y_x) = \int_0^\infty \underbrace{y_x}_{dv} \cdot \underbrace{e^{-sx}}_{u} \cdot dx \quad \text{تكامل بالتجزئة} \rightarrow = e^{-sx} y(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s \cdot e^{-sx} \cdot y \cdot dx$$

$$= -y(0) + s \cdot Y(s)$$

$$\mathcal{L}(y_{xx}) = s^2 Y(s) - sy(0) - y_x(0)$$

مثال: $y' - 5y = 0$ و $y(0) = 2$

الحل:

$$\mathcal{L}(y') - 5\mathcal{L}(y) = 0$$

$$sY(s) - y(0) - 5Y(s) = 0$$

$$(s-5)Y(s) - 2 = 0$$

$$Y(s) = \frac{2}{s-5} \Rightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = 2e^{5x}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z