كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تحقق على معادلة لابلاس: $U_{xx} + U_{yy} = 0$

$\Omega = \{(x,y) ; 0 < x < a ; 0 < y < b\}$

$u(x,y) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

$u(0,y) = f_1(y)$ ، $u(x,b) = g_2(x)$ ، $u(x,0) = g_1(x)$

$u(a,y) = F_2(y)$

- كل واحدة من المسائل السابقة نطبق طريقة فصل المتغيرات لنجد u_i ومن ثم نأخذ المجموع لنحصل على $u(x,y)$

- نحل على سبيل المثال المسألة الرابعة (علماً سنشبه بحل المسألة الثانية)

$$\text{IV} \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x,b) = g_2(x) \\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$X''Y + XY'' = 0$

$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \lambda$

تابع لـ x فقط ، تابع لـ y فقط

$X'' - \lambda X = 0$ & $Y'' + \lambda Y = 0$

ثم ننظر إلى الشروط الحدية.

- $u(0,y) = X(0)\,Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$ ($Y(y) \neq 0$)
- $u(a,y) = X(a)\,Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$ ($Y(y) \neq 0$)

$u(x,0) = \underbrace{X(x)}_{\neq 0} \cdot Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$

حل المعادلة:

$X'' - \lambda X = 0$

$m^2 - \lambda = 0$

نناقش حسب قيم λ:

1) $\lambda > 0$: $m = \pm\sqrt{\lambda}$

$X(x) = A\, e^{\sqrt{\lambda}\cdot x} + B\, e^{-\sqrt{\lambda}\cdot x}$

نعوض الشروط حتى نجد الثوابت A و B

$0 = X(0) = A + B \Rightarrow A = -B$

$X(a) = A\, e^{\sqrt{\lambda}\cdot a} + B\, e^{-\sqrt{\lambda}\cdot a}$

$X(a) = A\left(\underbrace{e^{\sqrt{\lambda}\cdot a} - e^{-\sqrt{\lambda}\cdot a}}_{\neq 0}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$

$A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow$ الحل الصفري مرفوض

2) $\lambda = 0$ $\quad m_{1,2} = 0$

$X(x) = A + Bx$

$X(0) = A = 0$

$X(a) = B \cdot a = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow$ الحل الصفري مرفوض

3) $\lambda < 0$

$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$X(0) = A = 0$

$X(a) = B\sin\sqrt{-\lambda}\cdot a = 0$

$\sin\sqrt{-\lambda}\cdot a = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\cdot a = n\pi \; ; n \in \mathbb{Z}$ بالتالي $B \neq 0$ نأخذ

$\Rightarrow \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \; ; n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{a}x}$

حل المعادلة الثانية:

$Y'' + \lambda_n Y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda_n = 0$

$\lambda_n < 0$ لأنّ تعيدها سابقاً

$Y(y) = a_n\, e^{\sqrt{-\lambda_n}\cdot y} + b_n\, e^{-\sqrt{-\lambda_n}\cdot y}$

$Y(0) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$Y(y) = A_n \cdot ch\sqrt{-\lambda}\,y + B_n \cdot sh\sqrt{-\lambda}\,y$$

$$Y(0) = A_n = 0 \Rightarrow \boxed{Y_n(y) = B_n \cdot sh\sqrt{-\lambda_n}\,y}$$

$$U_n(x,y) = C_n \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)x$$

$$g_2(x) = u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

منشو رفوريه لـ g بدلالة sin .

$$C_n \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a}\int_0^a g_2(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$\boxed{C_n = \left(sh\frac{n\pi b}{a}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{a}\int_0^a g_2(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx}$$

لنحل المسألة الأولى (حلّها يشبه الثالثة).

$$(I)\begin{cases} U_{xx} + U_{yy} = 0 \\ u(0,y) = f_1(y) \\ u(a,y) = u(x,b) = u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{-Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \& \quad Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$$

ننظر إلى الشروط الحدية:

- $u(a,y) = X(a) \cdot \underbrace{Y(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{X(a) = 0}$
- $u(x,0) = \underbrace{X(x)}_{\neq 0} \cdot Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$
- $u(x,b) = \underbrace{X(x)}_{\neq 0} \cdot Y(b) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(b) = 0}$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحالة (1): $\lambda = 0$

$Y(y) = Ay + B$

$Y(0) = B = 0$

$Y(b) = A\underbrace{b}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow A = 0$ } $\Rightarrow$ الحل الصفري مرفوض

الحالة (2): $\lambda < 0$ بالتالي $m^2 = -\lambda > 0$

$Y(y) = A \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot y} + B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot y}$

$Y(0) = A + B = 0$

$Y(b) = A\left(e^{\sqrt{-\lambda}\cdot b} - e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot b}\right) = 0$

$\Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow$ الحل الصفري مرفوض.

الحالة (3): $\lambda > 0$

$m^2 = -\lambda < 0$

$Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}\cdot y + B\sin\sqrt{\lambda}\, y$

$Y(0) = A = 0$

$Y(b) = B\sin\sqrt{\lambda}\cdot b \quad ; \quad B \neq 0$

$\sin\sqrt{\lambda}\cdot b = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}\, b = n\pi$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$

$Y_n(y) = B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}\cdot y\right)$

$X'' - \lambda_n X = 0$

$m^2 - \lambda_n = 0 \Rightarrow m^2 = \lambda_n > 0$

$X_n(x) = a_n \cdot e^{\sqrt{\lambda_n}\cdot x} + b_n \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n}\cdot x}$

$X_n(x) = a_n \cdot e^{\sqrt{\lambda_n}\cdot a}\cdot e^{\sqrt{\lambda_n}(x-a)} + b_n \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n}\cdot a}\cdot e^{-\sqrt{\lambda_n}(x-a)}$

$X_n(x) = A_n \cdot ch\sqrt{\lambda_n}(x-a) + B_n \cdot sh\sqrt{\lambda_n}\cdot(x-a)$

$X_n(a) = A_n = 0$

$X_n(x) = B_n \cdot sh\sqrt{\lambda_n}(x-a)$

$U_n(x,y) = B_n \cdot sh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}\cdot y\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$f_1(y) = u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot sh\left(\frac{-n\pi}{b} a\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

منشور فوريه لـ f بدلالة sin

$$B_n \cdot sh\left(\frac{-n\pi}{b} a\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f_1(y) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

$$B_n = \left(sh\left(\frac{-n\pi}{b} a\right)\right)^{-1} \times \frac{2}{b} \int_0^b f_1(y) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

انتهت الاسئلة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة