كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• حلّ معادلة التوصيل الحراري بطريقة فصل المتغيرات مع شروط ديريخليه الحدية :

- طريقة فصل المتغيرات تكون أنجح مع شروط حدية متجانسة

إذا كانت $\bar{u}$ حل لمعادلة التوصيل الحراري المحقّقة لشروط حدية متجانسة :

$$\begin{cases} \bar{u}(0,t)=0 \\ \bar{u}(l,t)=0 \end{cases}$$

حيث معادلة الحرارة $u_t = \alpha^2 . u_{xx}$ ولدينا شروط حدية $\begin{cases} w(0,t)=T_0 \\ w(l,t)=T_l \end{cases}$ (*) غير متجانسة

لتكن $\bar{u}$ هي حل معادلة التوصيل الحراري مع الشروط الحدية المتجانسة

وليكن $w(x,t)$ هو حل معادلة التوصيل الحراري في حالة الاتزان (مستقل عن الزمن)

مع الشروط الحدية المذكورة $w(0,t)=T_0$ و $w(l,t)=T_l$

$$w(x) = T_0 + \frac{T_l - T_0}{l} . x \quad (*_1)$$

فإن $u = \bar{u} + w$ هو حل لمعادلة التوصيل الحراري.

$$\bar{u}(0,t) + w(0,t) = 0 + T_0 = T_0$$

$$\bar{u}(l,t) + w(l,t) = 0 + T_l = T_l$$

$$u(x,t) = \bar{u} + w$$

هو حل لمعادلة التوصيل الحراري مع الشروط الحدية $u(0,t)=T_0$ و $u(l,t)=T_l$

w هو توزيع الحرارة في حالة الاتزان.

$\bar{u}$ إنتوزيع الحراري الانتقالي الذي يؤول إلى الصفر عندما t زيادة.

بالتالي: لإيجاد حل معادلة التوصيل الحراري المحقّقة للشروط الحدية (*) نقوم بإيجاد

لما من القانون (1) و لا الحقّقة للشروط الحدية المتجانسة ونجدها نقوم بالجمع

$$u_t = k \cdot u_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u(0,t) = T_0 \quad , \quad u(l,t) = T_l$$

بالاستفادة من ملاحظة سابقة نوجد $\bar{u}$ و w حيث

نوجد $\bar{u}$ حل المسألة الحدية المتجانسة الموافقة

$$w(x) = T_0 + \frac{T_l - T_0}{l} \cdot x$$

$$\bar{u}(0,t) = 0 = \bar{u}(l,t)$$

$$\bar{u}(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$XT' = k\,X''\,T$$

نقسم على kXT :

$$\frac{T'(t)}{k\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

تابع لـ t فقط — تابع لـ x فقط

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \& \quad T' - \lambda k T = 0$$

$$\bar{u}(0,t) = X(0)\,T(t) = 0 \Rightarrow T(t) \neq 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$\bar{u}(l,t) = X(l)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$$

$$m^2 - \lambda = 0$$

نناقش حسب قيم λ :

1) حالة $\lambda = 0$ (جذر مكرر) :

$$X(x) = ax + b$$

لتعيين a و b نلجأ إلى الشروط الحدية

$$\left.\begin{aligned} X(0) = b \Rightarrow b = 0 \\ X(l) = al + 0 \\ a = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(x) = 0$$ حل صفري مرفوض

2) حالة $\lambda > 0$ (جذور حقيقية مختلفة) :

$$X(x) = A\,e^{\sqrt{\lambda}\cdot x} + B\,e^{-\sqrt{\lambda}\cdot x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$

$X(l) = A \cdot e^{\sqrt{\lambda}\cdot l} + B\, e^{-\sqrt{\lambda}\cdot l} = 0$

$A\left[\underbrace{e^{\sqrt{\lambda}\cdot l} - e^{-\sqrt{\lambda}\cdot l}}_{\neq 0}\right] = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow X(x) = 0$

حل صفري مبتذل.

3) في حالة $\lambda < 0$: (جذور عقدية)

$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\cdot x + B\sin\sqrt{-\lambda}\cdot x$

نعوض بالشروط الحدية:

$X(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0$

$0 = X(l) = B\sin\sqrt{-\lambda}\cdot l$

بالتالي $B \neq 0$

$\sin\sqrt{-\lambda}\cdot l = 0$

$-\sqrt{\lambda}\cdot l = n\pi \quad ; \ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$

$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}\cdot x$

$\frac{T'}{T} = \lambda k \Rightarrow T(t) = c\cdot e^{\lambda k t}$

$= c\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot k t}$

$\bar{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{l}\cdot x\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot k t}$

لتعيين الثوابت c_n نطبق الشرط الابتدائي

$u(x,t) = \bar{u} + w$

$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{l}\cdot x + T_0 + \frac{T_l - T_0}{l}\cdot x$

$f(x) - \left(T_0 + \frac{T_l - T_0}{l}\cdot x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{l}\cdot x$

$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(f(x) - \left(T_0 + \frac{T_l - T_0}{l}\cdot x\right)\right)\cdot\frac{\sin n\pi}{l}\cdot x\cdot dx$

بالتالي تكون حل المسألة الحدية الابتدائية غير المتجانسة كتب على الشكل:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{l}\cdot x\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot} + T_0 + \frac{T_l - T_0}{l}\cdot x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

• حل معادلة التوصيل الحراري مع شروط نيومن الحدية :

نأخذ المسألة المعزولة:

$$\begin{cases} u_t = K\, u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = X(x)\, T(x)$

$X'' - \lambda X = 0$

$T' - K\lambda T = 0$

$u_x(x,t) = X'(x)\, T(t)$

$u_x(0,t) = X'(0)\, T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$ ($T(t) \neq 0$)

$u_x(l,t) = X'(l)\, T(t) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0$

$m^2 - \lambda = 0$ نناقش حسب قيم λ :

[1] $\lambda = 0$:

$X(x) = A + Bx$

$X'(x) = B \Rightarrow 0 = X'(0) = B$, $0 = X'(l) = B$ $\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow X(x) = A$

[2] $\lambda > 0$:

$X(x) = A e^{\sqrt{\lambda}\, x} + B e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$

$X'(x) = A\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}\, x} - B\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$

$0 = X'(0) = \sqrt{\lambda}\,(A - B) \Rightarrow A = B$ (حيث $\sqrt{\lambda} \neq 0$)

$0 = X'(l) = \sqrt{\lambda}\,(A e^{\sqrt{\lambda}\, l} - B e^{-\sqrt{\lambda}\, l})$

$= \sqrt{\lambda}\, A\,(e^{\sqrt{\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{\lambda}\, l}) \Rightarrow A = 0$ ($\sqrt{\lambda} \neq 0$, $e^{\sqrt{\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{\lambda}\, l} \neq 0$)

الحل المعزي مرفوض

[3] $\lambda < 0$:

$X(x) = A \cos\sqrt{-\lambda}\, x + B \sin\sqrt{-\lambda}\, x$

$X'(x) = -\sqrt{-\lambda}\, A \sin\sqrt{-\lambda}\, x + B\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}\, x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$0 = X'(0) = B\sqrt{-\lambda} \Rightarrow B = 0$ ($\sqrt{-\lambda} \neq 0$)

$0 = X'(l) = -\sqrt{-\lambda}\, A \sin\sqrt{-\lambda}\, l \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\, l = 0$ ($\sqrt{-\lambda} \neq 0$, $A \neq 0$)

$\sqrt{-\lambda}\, l = n\pi$

$\Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$

$X_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}\right) x$

$u_n = c_n \cos\frac{n\pi}{l} x \cdot e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt}$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{l} x \cdot e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt}$

تصبح لدينا الحالة $\lambda \leq 0$

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{l} x \cdot e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt}$

يمكن تطبيق الشرط الابتدائي لتعيين c_n

$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{l} x$

$= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{l} x$: cos منشور متسلسلة فورييه لـ $f(x)$ بدلالة

$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\frac{n\pi}{l} x \, dx$

• معادلة لابلاس (معادلة ناقصية):

شكلها $\Delta u = 0$ (ثنائية البُعد):

تُعد معادلة لابلاس من أهم المعادلات التفاضلية في الحالات التطبيقية حيث أنّها تظهر في الكثير من الجمل الرياضية والفيزيائية وحيث أنّها تظهر في ميكانيك السوائل وميكانيك الجسم الصلب وغير الكثير.

كمثال على نموذج فيزيائي لمعادلة لابلاس: معادلة التوصيل الحراري (في حالة الاستقرار) المستقلة عن الزمن وكذلك معادلة الموجة

• حلول معادلة لابلاس تسمّى توابع توافقية harmonic functions

- إذا كانت لدينا طرفة ثاني فإنّها تسمّى معادلة بواسون $\Delta y = f(x,y)$

معادلة لابلاس لا تحوي المجهول t (الزمن) وبالتالي ندرس من أجلها مسائل القيم

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحدية فقط وليست الابتدائية.

ملاحظة: المتحولات المستقلة الموجودة في المعادلة هي متحولات الفضاء x و y فقط وكلاهما من المرتبة الثانية لذلك لنحل مسألة القيم الحدية المتعلقة بمعادلة لابلاس نحتاج إلى شرطين حديين بكل متحول وبالتالي (4 شروط حدية)

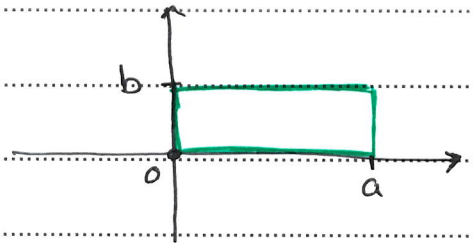
• حل مسألة القيم الحدية المتعلقة بمعادلة لابلاس:

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ليكن لدينا المستطيل:

$$\Omega = \{(x,y) \; ; \; 0 \le x \le a \;\; \& \;\; 0 \le y \le b\}$$



شروط ديريخليه الحدية تدعى بدالة التابع عند الحدود.

$$\begin{cases} u(0,y) = f_1(y) \\ u(x,0) = g_1(x) \\ u(a,y) = f_2(y) \\ u(x,b) = g_2(x) \end{cases}$$

ملاحظة: نستخدم طريقة فصل المتغيرات وتكن طريقة فصل المتغيرات تكون أنجح مع شروط حدية متجانسة

لذلك لحل معادلة لابلاس في منطقة مستطيل 4 مسائل قيم حدية في كل منها سنأخذ ثلاث شروط حدية متجانسة

(I)
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(0,y) = f_1(y) \\ u(x,0) = u(a,y) = u(x,b) = 0 \end{cases}$$

(II)
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(a,y) = f_2(y) \\ u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

III)
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = g_1(x) \\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0 \end{cases}$$

IV)
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x,b) = g_2(x) \\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \end{cases}$$

تمثل حل المسائل السابقة على الترتيب: $u_i(x,y)$ $i = \overline{1,4}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة