كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

ملاحظات حول الشروط الابتدائية والحدية:

[1] - يمكن أن تعطى درجة حرارة نهاية السلك كدالة في فترة ما (مجال زمني) $T \le t \le t_0$ حيث t هي الفترة الزمنية التي تمت فيها الدراسة فإذا كانت النهاية هي مثلاً $x=0$ فإن الشرط الحدي في هذه النهاية يعطى بالشكل: $u(0,t) = \mu(t)$ شروط ديرخليه

[2] - يمكن أن تعطى درجة الحرارة في نهاية السلك بقيمة المشتقة $\frac{\partial u}{\partial x}$ (تعبر عن التدفق) أي التدفق الحراري $Q = -K \cdot A \cdot u_x$ فإذا كانت النهاية هي l:

$$Q(l,t) = -K \cdot A \cdot u_x(l,t)$$

$$\Rightarrow \quad u_x(l,t) = \nu(t)$$

[3] - إذا كانت النهاية معزولة بالتالي لا يوجد تدفق $Q(l,t)=0 \Leftarrow u_x(l,t)=0$

إذا كانت النهاية هي صفر $u_x(0,t)=0$

[4] - إذا كانت إحدى النهايات مغمورة بسائل $x=l$ يمكن أن يعطى الشرط الحدي كعلاقة خطية بين $\frac{\partial u}{\partial x}$ و u (شرط روبن) بشكل العلاقة:

- النهاية: $u_x(l,t) = -\lambda \cdot (u(l,t) - \theta_2(t))$

حيث $\theta_2(t)$ درجة حرارة الوسط المحيط.

- البداية: $u_x(0,t) = -\lambda \cdot (\theta_1(t) - u(0,t))$

وذلك حسب قانون فورييه.

[5] - إذا كان ما يهمنا هو دراسة عملية التوصيل الحراري في سلك طويل جداً جداً وفي خلال فترة زمنية غير كبيرة عندها لا يكون تأثير درجة الحرارة على الحدود جوهرياً وبذلك يهمنا فقط الشروط الابتدائية (شرط ابتدائي) [التوزيع الابتدائي لدرجة

الحرارة] تصبح المسألة عبارة عن: معادلة الحرارة $u(x,t_0)=\varphi(x)$ و $-\infty<x<+\infty$

6- إذا كانت جزء السلك الذي نهتم بدرجة حرارته يوجد بالقرب من أحد طرفي السلك بعيداً عن الطرف الآخر فإن درجة الحرارة في هذه الحالة تتحدد بالشرط الابتدائي بالإضافة إلى الشرط الحدي في هذا الطرف القريب ونعتبر السلك نصف لانهائي.

تصبح المسألة: $u(x,t_0)=\varphi(x)$ و $u(0,t)=\mu(t)$ و $t_0\le t$ ،

$0<x<\infty$

7- إذا كانت الظاهرة تدرس في لحظات زمنية بعيدة بشكل كافي عن اللحظة الابتدائية فإن درجة الحرارة عملياً تتحدد بالشروط الحدية فقط لذلك تغيير الشروط الابتدائية لن يغير حالة درجة الحرارة في السلك في حدود دقة الملاحظة.

تصبح المسألة: $0\le x\le l$ ، $u(0,t)=u_1(t)$

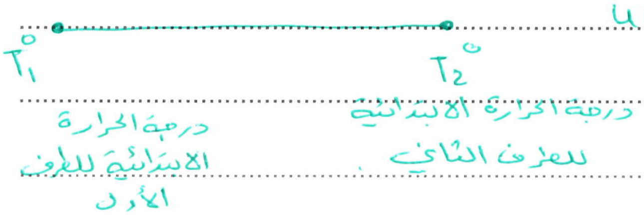
$u(l,t)=u_2(t)$ ، $-\infty<t$

8- يمكن إعطاء الشرط الابتدائي بطريقتين

a- أن يُعطى بشكل صريح تابع لـ x أي: $u(x,0)=f(x)$

b- تُعطى درجة حرارة الطرفين الابتدائيين وبالتالي علينا حساب درجة الحرارة الابتدائية لكل نقطة من نقاط السلك فإذا كانت درجة حرارة الطرفين الابتدائية T_1^0 و T_2^0 نعلم أنه بحيث توزع خطي لدرجة الحرارة على طول السلك فيكون:

$$u(x,0)=T_1^0+\frac{T_2^0-T_1^0}{l}\,x=f(x)$$



مسألة: يفرض لدينا سلك متجانس طوله l نهايتيه معزولتين ويكن لدينا مصدر حراري ثابت (على طول السلك لدينا نفس المصدر الحراري) ويكن درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0)=g(x)$ و g تابع معلوم

1- اكتب النموذج الرياضي الذي يصف المسألة؟

2 ـ احسب الطاقة الحرارية بتكامل السّلك ؟

الحل:

1)
$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + q_0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

2) $E(t) = \int_0^l u_t(x,t)\,dx$ نوجد أولاً: $\int_0^l u_t(x,t)\,dx$

$$\int_0^l u_t(x,t) = \int_0^l (\alpha^2 u_{xx} + q_0)\,dx = \alpha^2 u_x \Big|_0^l + q_0 \, x \Big|_0^l = q_0 \, l$$

ثمّ نكامل بالنسبة لـ t:

$$E(t) = \int_0^l u(x,t)\,dx = q_0 l t + c$$

لنوجد c نعوّض بشرط الابتدائي $t = 0$

$$E(0) = \int_0^l g(x)\,dx = c \qquad E(t) = q_0 \, l \, t + \int_0^l g(x)\,dx$$

• طريقة فصل المتغيرات لحل المعادلات التفاضلية الجزئية:

طريقة فصل المتغيرات نفرض أنّ الحل يمكن كتابته على شكل جداء توابع كل منها تابع لمتحول واحد فقط، أي بفرض $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حلاً وحيداً لمسألة معطاة فإنّ طريقة فصل المتغيرات نفترض أنّ الحل يمكن كتابته على شكل:

$$u = X_1(x) \cdot X_2(x) \cdots X_n(x_n)$$

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(x)$$

وبالتعويض عن هذا الحل في المعادلة التفاضلية الجزئية نجد أنّ دوال $X_1, \dots, X_n$ تحقق معادلات تفاضلية عادية. بحلها نجد: $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x)$

وبأخذ الجداء لهذه الدوال نحصل على حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

مثال: $u_{xx} - u_x = u_t$.

الحل: نفرض $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$u_{xx} = X'' T \qquad u_x = X' \cdot T$

نعوض في المعادلة $X''(x) \cdot T(t) - X'(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T'(t)$

نقسم على $X(x) \cdot T(t) \neq 0$

$$\frac{X''(x) - X'(x)}{X(x)} = \frac{+T'(t)}{T(t)}$$

الطرف الايمن تابع لـ t فقط والطرف الأيسر تابع لـ x فقط وبالتالي المساواة السابقة تساوي ثابت وليكن λ :

$$\frac{X''(x) - X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \Rightarrow X''(x) - X'(x) = \lambda X(x)$$

$$T'(t) = \lambda \cdot T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \Rightarrow T(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

معادلة خطية متجانسة من المرتبة الثانية $X''(x) - X'(x) = \lambda X(x)$

$$m^2 - m - \lambda = 0$$

$$1 - 4(-\lambda) = 1 + 4\lambda$$

نناقش حسب قيم λ

$\boxed{1}$ $\Delta > 0 \Leftarrow \lambda > -\frac{1}{4}$: جذور حقيقية موجبة:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$X(x) = c_1 e^{\frac{1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2}x} + c_2 \cdot e^{\frac{1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2}x}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = c \cdot e^{\lambda t}\left[c_1 \cdot e^{\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}x} + c_2 \cdot e^{\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}x}\right]$$

$$u(x,t) = c \cdot e^{\lambda t}\left[c_1 \cdot e^{\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2} \cdot x} + c_2 \cdot e^{\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2} \cdot x}\right]$$

$$u(x,t) = \left[A \cdot e^{\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}x} + B \cdot e^{\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2} \cdot x}\right] \cdot e^{\lambda t}$$

$\boxed{2}$ $\Delta < 0$ $\lambda < -\frac{1}{4}$:

$$X(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{-(1+4\lambda)}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{-(1+4\lambda)}}{2}x\right]$$

$$u(x,t) = T(x) \cdot X(x)$$

$\boxed{3}$ $\Delta = 0$ $\lambda = -\frac{1}{4}$

$$X(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{\frac{1}{2}x}$$

$u(x,t) = T(t) \cdot X(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}t} [c_1 + c_2 x] \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

• حل معادلة لابلاس بطريقة فصل المتغيرات :

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

$u_{xx} = X''Y \qquad u_{yy} = XY''$

$X''Y + XY'' = 0$

$\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{-Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \Rightarrow X'' - \lambda X = 0 \quad \& \quad Y'' + \lambda Y = 0$

$X'' - \lambda y = 0$

$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow$

نناقش حسب قيم λ

1) $\lambda > 0 \Leftarrow m^2 - \lambda > 0$

$X(x) = A \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + B \cdot e^{-\sqrt{\lambda}\cdot x} \Rightarrow Y'' + \lambda Y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda = 0$

$m^2 = -\lambda \Rightarrow m_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$

$Y(y) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, y + D \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, y$

$\boxed{u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)}$

2) $\lambda = 0$ $\qquad X(x) = A + Bx$

$Y(y) = c + Dy$

$\boxed{u(x,y) = (A + Bx)(c + Dy)}$

3) $\lambda < 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda \Rightarrow m = \pm i\sqrt{\lambda}$

$X(x) = A \cdot \cos\sqrt{-\lambda}\, x + B \cdot \sin\sqrt{-\lambda} \cdot x$

$Y(y) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, y} + D\, e^{-\sqrt{-\lambda}\, y}$

• حل معادلة النقل (التوصيل) بطريقة فصل المتغيرات

$u_t + c\, u_x = 0$

مثال:
$$u_t - 3u_x = 0$$
$$u(0,x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \quad ; \quad t > 0$$

الحل:

$$u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$$

$$u_t = T' \cdot X \quad , \quad u_x = T \cdot X'$$

$$T'X - 3TX' = 0$$

$$\underbrace{\frac{T'(t)}{3T(t)}}_{\text{تابع فقط لـ } t} = \underbrace{\frac{X'(x)}{X(x)}}_{\text{تابع فقط لـ } x} = \lambda$$

$$T' - 3\lambda T = 0 \quad \& \quad X' - \lambda X = 0$$

$$T(t) = c_1 \cdot e^{3\lambda T} \quad \& \quad X(x) = c_2 \cdot e^{\lambda x}$$

$$u(t,x) = c \cdot e^{\lambda(3t+x)}$$

$$\frac{1}{2} e^{-2x} = u(0,x) = c \cdot e^{\lambda x}$$

بالمطابقة
$$c = \frac{1}{2} \quad , \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2} e^{-2(3t+x)}}$$

انتهت المحاضرة