كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• مسائل من النوع المكافئ: parabolic problems

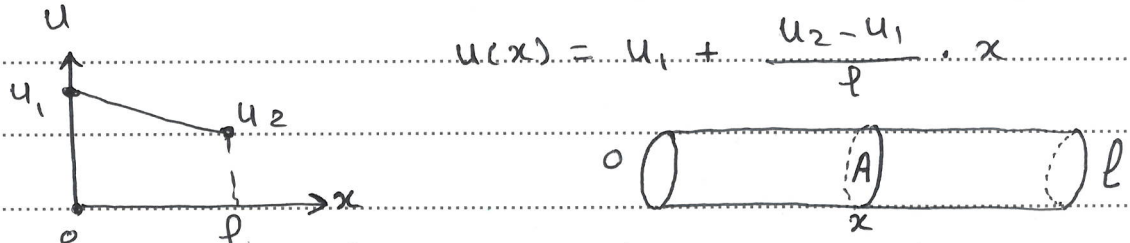
عبارة عن هذا النوع من المسائل معادلة سريان الحرارة وهي نموذج لوصف انتشار الحرارة في مادة صلبة كتابع للزمن والموضع. وهي من أبسط المسائل الودية إلى معادلات من النمط المكافئ

• معادلة الحرارة أحادية البعد The one dimensional heat equation

- ليكن لدينا سلك متجانس (كثافته على كامل الجزء نفسها وعن نفس المادة) طوله l وصنوع من مادة ناقلة للحرارة ومعزول حرارياً عن الجوانب (ليس الأطراف) ويكون رقيق بشكل كافي لكي يمكن في أية لحظة زمنية اعتبار درجة الحرارة واحدة في جميع نقاط المقطع العرضي A ونعتبر أن هذا السلك موضوع على محور ox $(x=0 \text{ و } x=l)$

ملاحظة: إذا احتفظنا بطرفي السلك عند درجتي حرارة ثابتتين فإنه سوف يحصل توزع خطي لدرجة الحرارة حيث سوف تسري الحرارة من الطرف الأكثر سخونة إلى الطرف الأقل سخونة حتى تصل إلى درجة الحرارة المستقرة

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} \cdot x$$

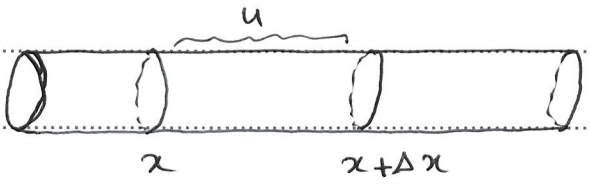


لنفرض أن الحرارة تنتشر فقط وفق المحور x وأن الحرارة التي يمكن أن تدخل أو تخرج من السلك تكون فقط من إحدى نهايتيه (لأنه معزول حرارياً) وبذلك يكون لدينا مسألة أحادية البعد

نفترض أيضاً أن الطاقة الحرارية ثابتة داخل السلك أي أن الحرارة المزودة تعادل

الحرارة الضائعة.

لتكن $u(x,t)$ هي الدالة التي تعبّر عن حرارة المقطع في النقطة x واللحظة t ولتكن U عبارة عن جزء من السلك من x حيث $x+\Delta x$ بطول Δx.

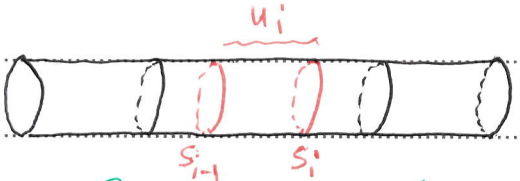


ولنقسّم المجال $x+\Delta x$ إلى n مجال جزئي طول كل منها Δs باستخدام النقاط:

$$x = S_0 < S_1 < \dots\dots\dots < S_n = x+\Delta x$$

ولنأخذ الجزء U_i من U الذي يمثّل أسطوانة ارتفاعها Δs

U_i رقيق بقدرٍ كافٍ بحيث تكون الحرارة متساوية داخله



- لدينا من نظرية التوصيل الحراري أنّ كمية الحرارة في الجزء U_i في اللحظة t تُعطى بالعلاقة:

$$Q_i = c.m_i.u(S_{i-1},t) = c.\rho.u(S_{i-1},t)$$

حيث m_i كتلة الجزء U_i

ΔV_i حجم الجزء U_i ، c السّعة الحرارية النوعية (كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة واحدة الكتل بمقدار واحدة قياس درجة الحرارة)

وبما أنّ U_i أسطوانة ارتفاعها Δs ومساحة قاعدتها A فإنّ:

$$\Delta V_i = A.\Delta s$$

$$Q_i = c.\rho.A.u(S_{i-1},t).\Delta s$$

بذلك تكون كمية الحرارة في الجزء U معطى بالعلاقة:

$$Q(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} Q_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} c.\rho.A.u(S_{i-1},t).\Delta s = \int_{x}^{x+\Delta s} c.\rho.A.u(s,t)\,ds$$

بالمفاضلة بالنسبة للزمن (لأنّنا نحسب كمية الحرارة التي تدخل من x وتخرج من

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خلال فترة زمنية من t إلى $t+\Delta t$ ... $x+\Delta x$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_x^{x+\Delta x} c.\rho.A.u_t(s,t)\,ds$$

بفرض u قابل للاشتقاق بشكل مستمر عندئذٍ يمكن أن نطبق نظرية القيمة الوسطى للتكامل

$$\left\{ x < \xi < x+\Delta x \quad \int_x^{x+\Delta x} u_t(s,t)\,ds = \Delta x \cdot u_t(\xi,t) \right\} \longrightarrow \text{نظرية القيمة الوسطى للتكامل}$$

طول المجال

$$\frac{dQ}{dt} = \int_x^{x+\Delta x} c.\rho.A.u_t(s,t)\,ds = c.\rho.A\,u_t(\xi,t)\,\Delta x$$

تعبّر عن كمية الحرارة المكتسبة في الجزء u خلال الزمن dt

من جهة ثانية باستخدام قانون فوريه (قانون تجريبي) فإنّ كمية الحرارة المكتسبة خلال أي مقطع من السلك تتناسب مع مساحة المقطع A ومع $-u_x(x,t)$

(u_x: تغير الحرارة في الموضع x)

ملاحظة:

إذا كانت درجة الحرارة تزداد بازدياد x هذا يعني أنّ الحرارة تكون أعلى إلى اليمين $u_x > 0$ وبذلك يكون سريان الحرارة إلى اليسار (من الأسخن إلى الأبرد) وهذا تفسير الإشارة السالبة.

- وبذلك تكون كمية الحرارة التي تدخل u عبر المقطع في x : $-k.A\,u_x(x,t)$

وكمية الحرارة التي تخرج من u عبر المقطع $x+\Delta x$ هي : $-k\,A\,u_x(x+\Delta x,t)$

حيث k معامل التوصيل الحراري للسلك وبالتالي كمية الحرارة المكتسبة في الجزء u هي:

$$-k\,A\,u_x(x,t) - \left(-k.A.u_x(x+\Delta x,t)\right)$$

والتي تساوي أيضاً $c\rho\,A.u_t(\xi,t)\,\Delta x$

نقسم على $c\rho\,A.\Delta x$ ونجعل $\Delta x \to 0$

$$= k.A\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right] = c.\rho\,A.u_t(\xi,t)\,\Delta x$$

$$u_t(x,t) = \frac{k}{c\rho}\,u_{xx}(x,t)$$

$= \alpha^2$ ثابت الانتشار

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x} = u_{xx}(x,t)$$

$\Delta x \to 0$

وهي معادلة التوصيل الحراري (سريان الحرارة) وهي معادلة أحادية البُعد خطية متجانسة من المرتبة الثانية مكافئية

• طاقة الحرارة الكلية للسّلك :

الطّاقة الحرارية الكلية للسّلك في اللحظة t تعطى بالعلاقة : $E(t) = \int_0^{\ell} u(x,t)\,dx$

التّفسير الذي تعطيه معادلة الحرارة ; $0<x<\ell$; $u_t = \alpha^2 . u_{xx}$

u_{xx} تمثل تقعّر منحني درجة الحرارة والذي يصف درجة حرارة كل نقطة بالنّسبة للنقاط المجاورة .

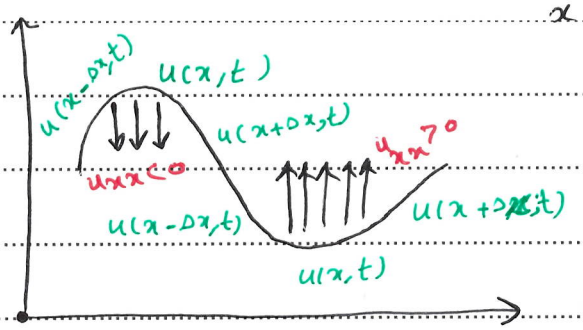
$$u_{xx} = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} =$$

$$\frac{2}{\Delta x^2}\left[\frac{u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)}{2} - u(x,t)\right]$$

- إذا كان معدل حرارة نقطتين مجاورتين لـ x أكبر من $u(x,t)$ (حرارة النقطة x) فإنّ التّقعر $u_{xx} > 0$ والتّدفق في x موجب و $u_t > 0$

- إذا كان معدل درجة حرارة نقطتين مجاورتين لـ x أصغر من $u(x,t)$ فإنّ $u_{xx} < 0$ وتدفق سالب $u_t < 0$

- في حال كان معدل درجة نقطتين مجاورتين لـ x يساوي درجة x فإنّ $u_{xx} = 0$ والتّدفق معدوم



ملاحظات :

1) مصادر حرارية يمكن أن تنشأ أو تمتص الحرارة في داخل السّلك (على سبيل المثال : مرور تيار كهربائي) ويمكن تمييز انبعاث حرارة بكثافة المصادر الحرارية $f(x,t)$ ونتيجة لتأثير هذه المصادر يضاف إلى المعادلة حد $\frac{f(x,t)}{c.\rho}$ يصبح شكل المعادلة :

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$$

[2] سريان الحرارة مع كسبان أو فقدان للحرارة:

$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u(x,t) - \theta(x,t))$ حيث $\beta = \frac{h}{c\rho}$ ، h معامل التبادل الحراري

$u(x,t)$ حرارة السلك ، $\theta(x,t)$ حرارة الوسط الخارجي (المحيط)

$u > \theta$ هي فقدان ، $u < \theta$ كسب

[3] في حال وجود مصادر حرارية مع تبادل حراري مع الجوانب تصبح المعادلة:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - au + f(x,t)$$

$$a = \frac{h}{c\rho} \quad , \quad f(x,t) = \frac{F_1(x,t)}{c\rho} + a\,\theta(x,t)$$

[4] حل معادلة الحرارة $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ حتى يمكن حلها بشكل وحيد نحتاج لشرط ابتدائي وشرطين حديين.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة