كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• طاقة الاهتزازات المتعرضة للخيط (ذبذبات وتر):

نعيّن صيغة طاقة الاهتزازات المتعرضة بالعلاقة: $E = K + U$

• طاقة حركة العنصر dx من الخيط الذي يتحرك بسرعة $v = u_t$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho \, dx \, (u_t)^2$$

وبالتالي الطاقة الحركية لكامل الخيط هي: $K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \, (u_t(x,t))^2 \, dx$

• الطاقة الكامنة للاهتزازات المتعرضة للخيط في اللحظة t هي عكس العمل الواجب بذله لكي ينتقل الخيط من وضع التوازن إلى الوضع $u(x,t)$ باعتبار أنّ الخيط في اللحظة $t=0$ ... $u(x,0)=0$ ... والعنصر dx تحت محصلة قوى الشد

$$T u_x \Big|_{x+\Delta x} - T u_x \Big|_x = T u_{xx} \cdot \Delta x$$

يقطع خلال الزمن dt المسافة $u_t(x,t)\,dt$ وبالتالي العمل المبذول للعنصر dx هو $T \cdot u_{xx} \cdot dx \cdot u_t(x,t)\,dt$ وبالتالي العمل المبذول للخيط كلّه هو:

$$\left[\int_0^L T \cdot u_{xx} \cdot u_t \, dx\right] dt = T\left[u_x \cdot u_t \Big|_0^L - \int_0^L u_x \cdot u_{tx} \, dx\right] dt$$

$$= T\left[u_x \cdot u_t \Big|_0^L - \int_0^L \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \cdot u_x^2\right] dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L T \cdot u_x^2 \, dx\right] dt + \left(T u_x u_t \Big|_0^t\right) dt$$

- في حال النهايات مثبتة $u_t(0,t)=0$ و $u_t(l,t)=0$
- في حالة النهايات حرّة $u_x(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$

• بإجراء التكامل بالنسبة لـ t للمقدار المتبقي: $U = +\frac{1}{2} \int_0^L T \cdot u_x^2(x,t)\,dx$

فتكون الطاقة الكلية لكامل الخيط (طاقة الاهتزازات):

$$E=\frac{1}{2}\int_0^L \rho\,(u_t(x,t))^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L T\,u_x^2(x,t)\,dx$$

بفرض أنّ الطاقة الكلية للخط هي:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2+c^2u_x^2)\,dx \quad ; \quad c^2=\frac{T}{\rho}$$

أوجد $\frac{dE}{dt}$ (تغيّر الطاقة الكلية بالنسبة للزمن) ؟

الحل:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}\int_0^L (2u_t\cdot u_{tt}+2c^2u_x\cdot u_{xt})\,dx$$

$$=\int_0^L u_t\cdot u_{tt}\,dx+c^2\left(u_x\cdot u_t\Big|_0^L-\int_0^L u_{xx}\cdot u_t\,dx\right)$$

$$=c^2\left[u_x(L,t)\cdot u_t(L,t)-u_x(0,t)\cdot u_t(0,t)\right]+\int_0^L u_t\cdot(u_{tt}-c^2u_{xx})\,dx \quad \}(*)$$

معادلة الموجة مع حد التخامد $u_{tt}-c^2u_{xx}+\gamma u_t=0$ نعوض في (*)

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt}=\int_0^L u_t(-\gamma u_t)\,dx=-\int_0^L \gamma u_t^2\,dx<0$$

لأنّه في حال التخامد الطاقة الكلية تتناقص.

ملاحظة: تكون $\frac{dE}{dt}=0$ فقط إذا كان $u_t(x,t)=0$ الخيط في حالة راحة متكون الطاقة ثابتة

ملاحظات حول الشروط الحدية والابتدائية للمسألة:

1- إذا كانت النهايات ثابتة $u(0,t)=0$ و $u(L,t)=0$ و $u_t(0,t)=0$ و $u_t(L,t)=0$ وعندها $\frac{dE}{dt}=0$ و $E=\text{const}$ (حالة مثالية دون تخامد)

2- في حال النهايات تتحرك بقانون حركة معيّن (تتغير فقط مع الزمن)

$u(0,t)=g_1(t)$ و $u(L,t)=g_2(t)$ وبالتالي تكون قوى الشدّ في هذه النهايات معدومة

$$T\cdot u_x=0 \Rightarrow \frac{dE}{dt}=0 \Rightarrow E=\text{const}$$

3- إذا كانت إحدى النهايتين مثبتة فيكون $u(0,t)=0$ أو $u_t(0,t)=0$ والأخرى حرة يكون $u_x(L,t)=0$

4- إذا كان ما يهمّنا هو حدوث الظاهرة خلال فترة زمنية قصيرة عندها لا يكون تأثير الحدود جوهرياً بعد، عندها يمكن دراسة المسألة بشروط ابتدائية فقط ولا نهائية.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فيكون النموذج الرياضي (عددها 2) شروط ابتدائية + معادلة الموجة

$u(x,0) = \varphi(x)$ ← وضع ابتدائي — φ تابع لـ x

$u_t(x,0) = \psi(x)$ — ψ تابع لـ x

$-\infty < x < +\infty$

5- إذا كنّا ندرس الظاهرة قرب أحد الحدود ولا يكون لتأثير النظام الحدي على الحد الآخر قيمة جوهرية خلال الفترة الزمنية التي تهمّنا فإنّنا نصل إلى مسألة على مستقيم (نصف مستقيم لانهائي) $0 \le x < \infty$

شرط حدي واحد + شروط ابتدائية + معادلة الموجة

$u(0,t) = \mu(t)$ — $u(x,0) = \varphi(x)$ — $u_t(x,0) = \psi(x)$ — $t \ge 0$

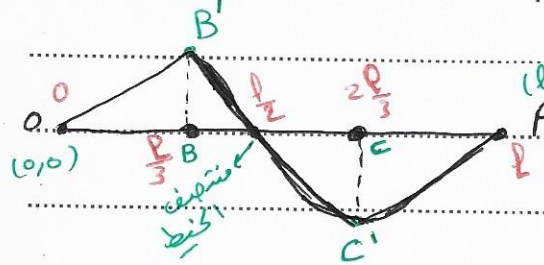
6- إذا كانت الظاهرة تُدرس في لحظات زمنية بعيدة بشكل كافٍ عن اللحظة الابتدائية $t = 0$ (هنا نهمل الشروط الابتدائية) فإنّ الشروط في المسألة تقتصر على الشروط الحدية:

شروط حدية + معادلة الموجة

$u(0,t) = \mu_1(t)$

$u(L,t) = \mu_2(t)$ — $0 \le x \le L$

تمرين خيط مشدود وعُبّتت من نهايتيه A و O. نزيح الخيط من نقطتين لأسفل ولأعلى مسافتين متساويتين تبعدان بعداً متساوياً عن الطرفين وعن بعضهما. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف المسألة ومن ثمّ برهن أنّ الإزاحة تبقى صغيرة عند التصفيف.



$u_{tt} = c^2 u_{xx}$

الشروط الحدية $u(0,t) = u(l,t) = 0$

$u_t(x,0) = 0$ — $u(x,0) = ??$

لدينا معادلة OB': $u = \frac{3a}{l} x$

معادلة $B'C'$: $\frac{u-a}{x-\frac{l}{3}} = \frac{a-(-a)}{\frac{l}{3}-\frac{2}{3}l} = \frac{3a}{l}(-2x+l)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

معادلة c'A

$$u = \left(\frac{3a}{\ell}\right)(x-\ell)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{3a}{\ell}\cdot x & ; \quad 0 \le x \le \frac{\ell}{3} \\ \frac{3a}{\ell}(-2x+\ell) & \frac{\ell}{2} \le x \le \frac{2\ell}{3} \\ \frac{3a}{\ell}(x-\ell) & \frac{2\ell}{3} \le x \le \ell \end{cases}$$

المطلب الثاني: برهان أنّ $u\left(\frac{\ell}{2}, t\right) = 0$??

نعوض $x = \frac{\ell}{2}$ ثمّ نعوض $u(x,t)$ في المعادلة لإيجاد

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{\ell}\right)(-2x+\ell-2ct-2x+2ct+\ell)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{\ell}\right)(-4x+2\ell) \quad ; \quad x = \frac{\ell}{2}$$

$$u\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{\ell}\right)(-2\ell+2\ell) = 0$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z