كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية

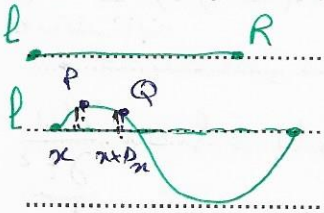
رأينا أنّ هذه المعادلات تُصنّف إلى زائدية - مكافئية - ناقصية سنأخذ مثال عن كل منها زائدية مثل [معادلة الموجة - مكافئية مثل [معادلة الحرارة أو التوصيل الحراري] - ناقصية مثل [معادلة لابلاس]

• معادلة الموجة wave equation :

الشكل العام لهذه المعادلة $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. ولهذه المعادلة العديد من التطبيقات الفيزيائية مثل الأمواج الصوتية في الهواء - الأمواج المغناطيسية في الغلاف الجوي وغيرها

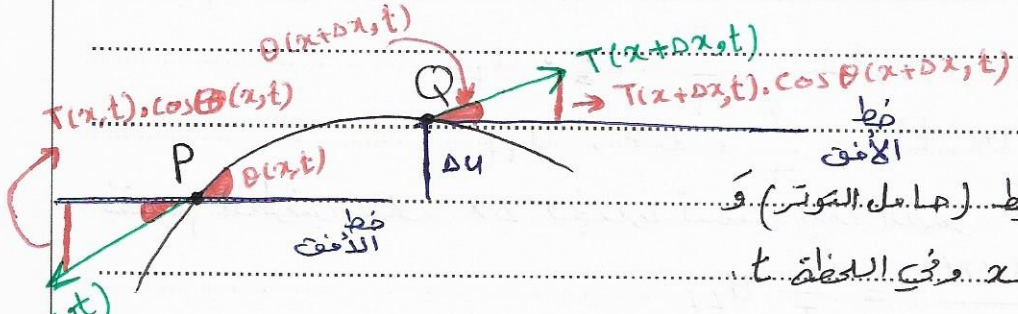
من أبسط المسائل المؤدية إلى معادلات من النمط الزائدي معادلة الذبذبات المستعرضة المتشكلة على خيط مرن ومشدود قابل للانثناء وإزاحة في مستوٍ واحد

• ليكن لدينا خيط مرن مشدود موضوع بشكل أفقي وعثبت في نهايته . نهزّ الخيط في نهايته l عندها نلاحظ موجة تعبر هذا الخيط.



هدفنا : هو تحديد الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x وفي اللحظة t

• نعبّر عن مقدار الازاحة في جزء صغير من الخيط بين نقطتين P و Q بالشكل :



حيث

$\theta(x,t)$ هي الزاوية المتشكلة بين جماس الخيط (حامل الوتر) و الخط الأفقي في الموضع x وفي اللحظة t.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$T(x,t)$ توتر الخيط في الموضع x واللحظة t

ρ كثافة الخيط (الكتلة الطولية / كتلة واحدة الطول)

نفرض أنّ الخيط وسيط عن مادة متجانسة وبالتّالي يمكن أن نعتبر ρ ثابتة على طول الخيط وبالتالي تكون كتلة الخيط بين P و Q هي جداء الكثافة بطول الخيط بين P و Q وليكن ΔS

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta x)^2}$$

وبما أنّ مقدار الإزاحة بين P و Q هو Δu مقدار صغير بقدر كاف بالتالي $\Delta S \approx \Delta x$

بالتّالي كتلة الخيط بين P و Q هي: $\rho \Delta x$ نفترض أنّ قوى الجاذبية معدومة بالتّالي القوى الطبقة على هذا الجزء من الخيط هي $T(x,t)$ في P بزاوية $\theta(x,t)$ مع الأفق و $T(x+\Delta x,t)$ في Q بزاوية $\theta(x+\Delta x,t)$ مع الأفق . القطع PQ يتحرك فقط بشكل عمودي بالتّالي محصلة القوى الأفقية معدومة . بتطبيق قانون نيوتن :

• محصلة القوى الأفقية معدومة .

$$-T(x,t)\cdot\cos\theta(x,t) + T(x+\Delta x,t)\cdot\cos\theta(x+\Delta x,t) = 0$$

$$\Rightarrow T(x,t)\cdot\cos\theta(x,t) = T(x+\Delta x,t)\cdot\cos\theta(x+\Delta x,t) = T$$

← مقدار ثابت

• محصلة القوى العمودية :

$$-T(x,t)\cdot\sin\theta(x,t) + T(x+\Delta x,t)\cdot\sin\theta(x+\Delta x,t) = \rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

← التسارع هو المشتق الثاني للإزاح العمودي بالنسبة للزمن

نقسم طرفي المعادلة على المقدار الثابت T فنحصل على :

$$\tan\theta(x+\Delta x,t) - \tan\theta(x,t) = \frac{\rho}{T}\cdot\Delta x\cdot u_{tt}$$

$$u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t) = \frac{\rho}{T}\cdot\Delta x\cdot u_{tt}$$

نقسم الطرفين على Δx ونجعلها تسعى إلى الصفر :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}u_{tt}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u_{xx} = \frac{\rho}{T} u_{tt} \Rightarrow u_{tt} = \frac{T}{\rho} u_{xx} \Rightarrow u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} \quad ; \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

c سرعة الموجة

وضعنا التربيع فقط لإثبات أنّه مقدار موجب

$u_{xx} > 0$ تقعّر للأعلى $u_{tt} > 0$

$u_{xx} < 0$ تقعّر للأسفل $u_{tt} < 0$

ملاحظة (1): التفسير الذي تعطيه معادلة الموجة:

ملاحظة (2):

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

$$D_t^2 u - c^2 D_x^2 u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$(D_t^2 - c^2 D_x^2) u = 0$$

$$(D_t - c D_x)(D_t + c D_x) u = 0$$

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

f ← موجة متحركة نحو اليسار بسرعة c

g ← موجة متحركة نحو اليمين بسرعة c

توابع اختيارية

- $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$ ← معادلة تفاضلية
- شروط البدائية ←
  - $u(x,0) = \varphi(x)$
  - $u_t(x,0) = \psi(x)$ ← يعبّر عن السرعة الابتدائية للخيط في كل نقطة من نقاطه

حل هذه المسألة يسمى حل دالمبير لتعيين D'Alembert Solution

هذا الحل لدينا

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

$$\varphi(x) = u(x,0) = f(x) + g(x) \quad \cdots (1)$$

$$u_t(x,t) = c \cdot f'(x+ct) - c\, g'(x-ct)$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = c\,(f'(x) - g'(x))$$

علينا تعيين صيغة كلٍّ من f و g

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \underbrace{\psi(s)}_{W(x)}\, ds \quad \cdots (2)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بجمع ① و ②

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(v(x) + \frac{1}{c}W(x)\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(v(x) - \frac{1}{c}w(x)\right)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[v(x+ct) + v(x-ct) + \frac{1}{c}W(x+ct) - \frac{1}{c}W(x-ct)\right]$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[v(x+ct) + v(x-ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} w(s)\,ds - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} w(s)\,ds\right]$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[V(x+ct) + v(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} w(s)\,ds\right]$$

ويسمّى حل د'المبرت لمعادلة الموجة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z