كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

حلول معادلة تفاضلية جزئية:

الحل العام: هو الصّيغة التي تعبّر عن جميع الحلول لمعادلة تفاضلية جزئية والحل العام لمعادلة تفاضلية جزئية من المرتبة n تحتوي على n من الدوال (التوابع) الاختيارية.

الحل الخاص: هو حل مستنتج من صيغة الحل العام باختيارات خاصة للدوال الاختيارية.

• الحل القوي والحل الضّعيف:

الحل القوي: هو حل حتمي ومقابل للاشتقاق ومشتقاته جميعها مستمرة في بعض الأحيان في المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية يوجد حلول لا تتطلب أن تكون نظامية (لا تحقق شرط الاستمرار بالنسبة لأحد المشتقات) مثل هذه الحلول تسمّى الحلول المضعفة أو المعمّمة.

ملاحظة: الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية غير المتجانسة هو مجموع حلّين: الحل العام للمعادلة المتجانسة وحل خاص للمعادلة غير المتجانسة.

فيزيائياً: يمكن أن نفسّر الحل الخاص بأنّه رد فعل الجملة على القوى الخارجية المطبقة وحل المتجانسة يمثل داخل الجملة (بدون قوى خارجية) والحل العام يمثل حالة الجمع بين الداخل والخارج.

• طرق حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

هناك طرق كثيرة جداً لحل المعادلات التفاضلية الجزئية وتطبيقة عملياً وأعظمها أهمية تلك الطّرق التي تحوّل المعادلات التفاضلية إلى معادلات تفاضلية عادية ومنها الطرق التّالية:

1. طريقة فصل المتغيرات: يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى عدة معادلات تفاضلية عادية (عددها سيكون حسب عدد المتحولات المستقلة).

2- التحويلات العكاملية: وبهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية والتي لها m من المتحولات المستقلة إلى معادلة تفاضلية جزئية لها m-1 من المتحولات المستقلة ..... ومن ثمّ تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المتحولين المستقلين إلى معادلة تفاضلية عادية.

3- الطرائق العددية: تحوّل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى مجموعة من المعادلات الفروقية التي يمكن حلّها بعمليات حسابية متكررة بواسطة الحاسب وفي العديد من الحالات يكون هو الحل الوحيد الممكن (هذه الطرق تدرس في مقرر التحليل العددي)

• أنواع الشروط الحدية: لدينا 3 أنواع للشروط الحدية

1- شروط ديريخليه Dirichlet: تُعطى بدلالة قيمة التابع على الحدود

2- شروط نيومن Neuman: تُعطى بدلالة مشتق التابع عند الحدود

3- شروط روبن Roben: تُعطى بدلالة التابع والمشتقات عند الحدود

• الشكل العام لمعادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية لمتحولين مستقلين:

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G \quad \cdots (1)$$

حيث A و B و C و D و E و F و G إمّا أن تكون ثوابت أو دوال مستمرة تابعة للمتحولين x و y فقط

تُصنّف المعادلة (1) بحسب:

1- التجانس: تكون المعادلة (1) متجانسة homogen إذا كان $G(x,y)=0$ وتكون غير متجانسة إذا كان $G(x,y)\neq 0$

2- أنواع المعادلات (الأمثال): إذا كانت الأمثال (A و B و C و D و E و F) ثوابت فإنّ المعادلة (1) تسمّى معادلة تفاضلية جزئية خطية ذات أمثال ثابتة وإذا كان واحد على الأقل من الأمثال تابع لـ x أو y أو كلاهما تسمّى المعادلة ذات أمثال متغيرة

3- الأنواع الثلاثة الأساسية:

a- النوع المكافئ parabolic: $B^2 - 4AC = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

b. النوع الزائدي: Hyperbolic $B^2-4AC>0$

c. النوع الناقصي: Elliptic $B^2-4AC<0$

ملاحظة: B^2-4AC هو دالة بدلالة المتحولات المستقلة ولذلك فإنّ المعادلة تتغيّر من نوع لآخر ومن نقطة لأخرى تبعاً للمتحولات المستقلة

مثال ①: معادلة جزئية خطية مرتبة ثانية أمثالها ثابتة: $u_t = u_{xx}$

معادلة مكافئية $\Rightarrow B^2-4AC=0$ $A=1$ $B=0$ $C=0$

مثال ②: لدينا: $u_{tt} = u_{xx}$

معادلة زائدية $B^2-4AC=4>0$ $A=1$ $B=0$ $C=-1$

مثال ③: $u_{xy}=0$

معادلة زائدية $B^2-4AC=1>0$ $A=0$ $B=1$ $C=0$

مثال ④: $\alpha u_{xx}+u_{yy}=0$

وسيط

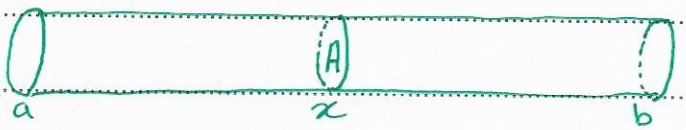
$\Rightarrow B^2-4AC=-4\alpha$ $A=\alpha$ $B=0$ $C=1$

نوع المعادلة حسب الوسيط α: عندما $\alpha>0$ المعادلة ناقصية

عندما $\alpha=0$ المعادلة مكافئية عندما $\alpha<0$ المعادلة زائدية

معادلة النقل (التوصيل): transport equation

نفرض لدينا مادة كيميائية منحلّة في الماء تتحرّك بسرعة منتظمة c عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منتظم A [نفس المناقشة تُطبّق على حركة غاز في الهواء عبر أنبوب] نريد معرفة تركيز المادة الكيميائية المنحلّة في الماء أو الغاز الموجود في الهواء بكل لحظة وبكل نقطة



لنعبّر عن G بالمجال المغلق ab ولتكن السّرعة $c>0$ باتجاه الموجب للحركة على المحور x ونفرض أنّ تركيز المادة الكيميائية ثابت عبر المقطع A في كل نقطة x وبذلك فإنّ تركيز المادة الكيميائية يتغيّر بتغيّر x فقط (لأنّ الأنبوب رفيع) المسألة في

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فضاء أحادي البعد ويمكن $u(x,t)$ دالة قابلة للاشتقاق ومستمرة وتعبّر عن تركيز المادة الكيميائية في النقطة x واللحظة t وبالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في الأنبوب بين a و x تعطى بالشكل: $\int_a^x A.u(s,t)\,ds$

وبما أنّ الماء يجري بسرعة مستقلة c فإنّه في اللحظة $(t+h)$ سيكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية أي أنّ:

$$\int_a^x A.u(s,t)\,ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A.u(s,t+h)\,ds$$

نشتق بالنسبة لـ x:

$$1.A.u(x,t) + 0 = 1.A.u(x+ch, t+h)$$

فنحصل على: $u(x,t) = u(x+ch, t+h)$

نشتق بالنسبة لـ h:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x+ch}\cdot\frac{\partial x+ch}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial t+h}\cdot\frac{\partial t+h}{\partial h}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(c) + \frac{\partial u}{\partial (t)}\cdot 1 \Rightarrow 0 = c.u_x(x+ch) + u_t(x+ch, t+h)$$

نجعل h تقارب من الصفر فيكون لدينا $u_t(x,t) + c.u_x(x,t)$

وتسمّى هذه المعادلة معادلة النّقل في البعد الواحد وهي معادلة خطية متجانسة من المرتبة الأولى

مثال: $u_t(x,t) + c.u_x(x,t) = 0$

لحلّ هذه المعادلة نستخدم طريقة لاغرانج، نكتب الجملة التّناظرية

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c} = \frac{du}{0} \Rightarrow \begin{cases} x - ct = k_1 \\ u(x,t) = k_2 \end{cases}$$

الحل العام هو تابع اختياري للحلين السابقين $F(x-ct, u) = 0$

$u(x,t) = f(x-ct)$ ← تابع اختياري

ملاحظة: نسمي الحل $u(x,t) = f(x-ct)$ بالموجّة المتنقلة نحو اليمين لأنّ المنحني البياني للتّابع $F(x-ct)$ هو نفس بيان الـ

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(x)$ ويكن بانزياح نحو اليمين بقيمة (بمقدار) ct وبالتالي فإن المنحني $F(x)$

يمرور الوقت يتحرك نحو اليمين بدون تغيير وبسرعة c

مسألة القيم الابتدائية المواقفة: $u(x,0)=g(x)$ ← تابع معلوم

$x_0(t)=t \quad y_0(t)=0 \quad u_0(t)=g(t)$ من الحل العام الذي أوجدناه

$u(x,t)=f(x,t) \Longrightarrow$ باستخدام الشرط $g(x)=u(x,0)=f(x)$

$u(x,t)=g(x-ct)$

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية $u_t-3u_x=0$ الذي يحقق قيماً معينة على منحني معطى $u(x,0)=e^{-x^2}$

$x_0(t)=t$

$y_0(t)=0 \quad u_0(t)=e^{-t^2}$

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{-3}=\frac{du}{0} \Longrightarrow \begin{cases} x+3t=k_1 \\ u(x,t)=k_2 \end{cases}$$

$F(u(x,t), x+3t)=0$ الحل العام

$u(x,t)=f(x+3t)$ تابع اختياري

$e^{-x^2}=u(x,0)=f(x)$

$u(x,t)=e^{-(x+3t)^2}$

• مسألة التوصيل مع منبع الاضمحلال:

نقول عن التابع u أنه يحقق بشكل أسي إذا حققت المعادلة:

$\frac{du}{dt}=\lambda u \qquad u=e^{\lambda t} \qquad \lambda<0$

• معادلة التوصيل مع منبع الاضمحلال:

$u_t+c\cdot u_x+\lambda u=f(x,t)$

λu حد الاضمحلال $\lambda>0$ و c ثابت و F تابع يحقق بمثل الحد الخارجي

الجملة المساعدة لها: $\frac{dt}{1}=\frac{dx}{c}=\frac{du}{f-\lambda u}$

مثال وظيفة: $u_t+u_x+u=t$

معادلة مع اضمحلال $\lambda=1>0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حلّها بوجود u بدون مصدر خارجي عبارة عن تابع أسي يصمد الزمن سيكون

$$u = e^{-t} f(x-ct)$$

أما حلولها بوجود طرف ثاني

$$u = e^{-t} p(x-ct) + t$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z