كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : برمجة رياضية

المحاضرة : الثامنة/نظري/

يمكن التعبير عن متتالية محدودة أو مجموعة محدودة من متتالية غير محدودة باستخدام التعليمة :

$Table[expression, \{x, min, max\}]$

$Table[expression, \{x, min, max, d\}]$

مثال : متتالية الأعداد الفردية المحصورة بين 0 و 50

$\text{Table}[2n + 1, \{n, 0,24\}]$

$\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49\}$

حيث $2n + 1$ هو الحد العام للمتتالية .

أو :

$\text{Table}[n, \{n, 1,47,2\}]$

مثال : اكتب متتالية تعبر عن مربعات الأعداد من 1 حتى 10 .

$\text{Table}[n\text{^}2, \{n, 1,10\}]$

$\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$

المتتالية المتقاربة والمتتالية المتباعدة :

نقول عن المتتالية a_n أنها متقاربة إذا كان حدها العام يسعى إلى عدد حقيقي (عندما $n \to \infty$)

نقول عن المتتالية a_n أنها متباعدة إذا كان حدها العام يسعى إلى ∞ (عندما $n \to \infty$)

من أجل اختبار تقارب وتباعد متتالية في برنامج الماثيماتكا نستخدم :

$\boldsymbol{Limit[a_n , n \to Infinity]}$

مثال : فيما يلي الحد العام لعدد من المتتاليات العددية ، حدد كل متتالية إن كانت متقاربة أو متباعدة.

1) : $a_n = \frac{1}{n}$

$\text{Limit}[1/n , n \to \text{Infinity}]$

$\boxed{0}$

أي أن المتتالية متقاربة من الصفر

2) : $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Limit[(1 + 1/n)^n, n → Infinity]

$\boxed{e}$

أي أن المتتالية متقاربة من e .

3) : $a_n = 1 - (\frac{n}{4})^5$

Limit[1 − (n/4)^5, n → Infinity]

$\boxed{-\infty}$

أي أن المتتالية متباعدة إلى $-\infty$.

المتتاليات المحدودة وغير المحدودة :

نقول عن المتتالية a_n أنها محدودة إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $|a_n| < M$
أي $-M < a_n < M$ وتكون المتتالية محدودة من الأعلى إذا انتمت حدودها إلى المجال $]-\infty, M[$ ومن الأسفل إذا انتمت حدودها إلى المجال $]M, \infty[$

- المتتالية المتقاربة لها نهاية وحيدة .
- كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة .
- المتتالية المحدودة ليس بالضرورة متقاربة .
- إذا كانت المتتالية متباعدة فهي غير محدودة .

مثال : حدد المتتالية المحدودة والمتقاربة من غير المحدودة والمتباعدة .

1) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Limit[n/(n + 1), n → Infinity]

$\boxed{1}$

أي أن المتتالية متقاربة و محدودة .

2) $a_n = -n$

Limit[−n, n → Infinity]

$\boxed{-\infty}$

أي المتتالية متباعدة و غير محدودة .

$a_n = (-1)^n$ (3

$\text{Limit}[(-1)\text{^}n, n \to \text{Infinity}]$

$\boxed{e^{2i\text{Interval}[\{0,\pi\}]}}$

النهاية إما 1+ أو 1- وبالتالي المتتالية محدودة ومتباعدة .

$a_n = (-1)^n\, n$ (4

$\text{Limit}[(-1)\text{^}n * n, n \to \text{Infinity}]$

$\boxed{e^{2i\text{Interval}[\{0,\pi\}]}\infty}$

النهاية إما ∞+ أو ∞ - وبالتالي المتتالية غير محدودة ومتباعدة .

المتسلسلات :

$$\sum_{n=min}^{max} a_n \quad \leftrightarrow \quad Sum[a_n\,, \{n, min, max\}]$$

$$Sum[a_n\,, \{n, min, max, d\}]$$

مثال : أوجد مجموع مربعات الأعداد من 1 وحتى 10 .

$\text{Sum}[i\text{^}2, \{i, 10\}]$

$\boxed{385}$

مجموع مربعات الـn حدود الأولى :

$\text{Sum}[i\text{^}2, \{i, n\}]$

$\boxed{\frac{1}{6}n(1+n)(1+2n)}$

المتسلسلات المتقاربة والمتباعدة :

نعلم أنه توجد عدة اختبارات (دالامبير ، كوشي ، راب ...) لتحديد تقارب وتباعد المتسلسلة ، و في برنامج الماثيماتكا إذا كانت المتسلسلة متقاربة فإن البرنامج سيعطينا مجموعها أما إذا كانت متباعدة فستظهر الرسالة التالية :

```
Sum::div: Sum does not converge. ≫
```

الرسالة تبين أن المجموع غير متقارب أي المتسلسلة متباعدة .

مثال :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Sum[1/n, {n, 1, Infinity}]

أي المتسلسلة متباعدة

```
Sum::div: Sum does not converge. ≫
```

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Sum[1/n^2, {n, 1, Infinity}]

$\boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

أي متقاربة ومجموعها $\frac{\pi^2}{6}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

Sum[n, {n, 1, Infinity}]

```
Sum::div: Sum does not converge. ≫
```

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)^2}$

Sum[1/(2(n + 1)^2), {n, 1, Infinity}]

$\boxed{\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\pi^2}{6}\right)}$

نشر الدوال في متسلسلة تايلور :

إذا كان التابع مستمر وقابل للاشتقاق أكثر من مرة في جوار نقطة x_0 فإنه يمكن تمثيل هذا التابع بسلسلة تايلور كما يلي :

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots}$$

وتدعى متسلسلة تايلور (وهي منشور التابع في جوار x_0) .

وعندما $x_0 = 0$ يسمى منشور ماك لوران ويكتب بالشكل :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

لإيجاد منشور تايلور لتابع في برنامج الماثيماتكا نستخدم التعليمة :

$$\boldsymbol{Series}[f,\{x,x_0\,,\mathbf{n}\}]$$

حيث n تعني الحدود n+1 الأولى التي نرغب بإظهارها من منشور تايلور وتدخل الحدود المعدومة (0) ضمن هذه الحدود التي عددها n+1 وبالتالي يمكن اعتبار n أكبر درجة نرغب بإظهارها للمتحول x .

أمثلة :

1) $f(x)\,, \boldsymbol{x_0} = a\,, n = n$

$$\text{Series}[f[x],\{x,a,n\}]$$

تظهر رسالة خطأ تفيد أن البرنامج لا يتمكن من إظهار النتيجة لأن n غير محدود .

2) $f(x)\,, \boldsymbol{x_0} = a\,, n = 5$

$$\text{Series}[f[x],\{x,a,5\}]$$

$$f[a] + f'[a](x-a) + \frac{1}{2}f''[a](x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}[a](x-a)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}[a](x-a)^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}[a](x-a)^5 + O[x-a]^6$$

3) $Cos(x)\,, \boldsymbol{x_0} = 3\,, n = 6$

$$\text{Series}[\text{Cos}[x],\{x,3,6\}]$$

$$\text{Cos}[3] - \text{Sin}[3](x-3) - \frac{1}{2}\text{Cos}[3](x-3)^2 + \frac{1}{6}\text{Sin}[3](x-3)^3 + \frac{1}{24}\text{Cos}[3](x-3)^4 - \frac{1}{120}\text{Sin}[3](x-3)^5 - \frac{1}{720}\text{Cos}[3](x-3)^6 + O[x-3]^7$$

4) $e^x\,,\ n = 10$

Series[Exp[x], {x, 0,10}]

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}+O[x]^{11}$$

5) $Cos(x)\,,\ n=10$

Series[Cos[x], {x, 0,10}]

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}-\frac{x^{10}}{3628800}+O[x]^{11}$$

6) $Ln(x)\,,\ n=10$

Series[Log[x], {x, 0,10}]

$\boxed{\text{Log}[x]+O[x]^{11}}$

نلاحظ أنه لا يظهر جواب وذلك لأن Log[0] غير موجود .

إيجاد معامل ما من منشور تايلور :

لإيجاد المعامل ذي الترتيب n من منشور تايلور نستخدم التعليمة :

SeriesCoefficient[f, {x, x0, n}]

مثال : أوجد معامل الحد 0 و الحد 2 من منشور ماك لوران للتابع $Cos(x)$

SeriesCoefficient[Cos[x], {x, 0,0}]

$\boxed{1}$

SeriesCoefficient[Cos[x], {x, 0,2}]

$\boxed{-\frac{1}{2}}$