



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

المادة : برمجة رياضية

المحاضرة : السابعة / نظري

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التكامل يمكن أن يكون محدود أو غير محدود ، وللتكامل في كل حالة من هاتين الحالتين ثلاثة أنواع :

- (١) التكامل الأحادي رمزه $\int$.
- (٢) التكامل الثنائي (السطحي) رمزه $\iint$.
- (٣) التكامل الثلاثي (الحجمي) رمزه $\iiint$.

التكامل غير المحدود في برنامج الماثيماتكا :

(1) التكامل الأحادي :

$$\int f(x) dx \longrightarrow \text{Integrate} [f, x]$$

(2) التكامل الثنائي (السطحي) :

$$\iint f(x) dx dy \longrightarrow \text{Integrate} [f, x, y]$$

(3) التكامل الثلاثي (الحجمي) :

$$\iiint f(x) dx dy dz \longrightarrow \text{Integrate} [f, x, y, z]$$

التكامل المحدود في برنامج الماثيماتكا :

(١) التكامل الأحادي :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \longrightarrow \text{NIntegrate} [f, \{x, x_1, x_2\}]$$

(٢) التكامل الثنائي :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy dx \longrightarrow \text{NIntegrate} [f, \{x, x_1, x_2\}, \{y, y_1, y_2\}]$$

(٣) التكامل الثلاثي (الحجمي) :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz dx dy \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$NIntegrate[f, \{x, x_1, x_2\}, \{y, y_1, y_2\}, \{z, z_1, z_2\}]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ ترتيب العمليات في التكامل .

ملاحظة هامة :

يمكن في التكامل المحدود استخدام التعليمة *Integrate* ويعطي البرنامج عندها الناتج بشكل كسر أو جذر .

أمثلة :

$$(١) \int x dx$$

$$Integrate[x, x]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$(٢) \int_e^{\pi} \cos(x) dx$$

$$NIntegrate[\cos[x], \{x, E, \text{Pi}\}]$$

$$\begin{bmatrix} -0.410781 \end{bmatrix}$$

$$(٣) \iint (x^2 + y) dy dx$$

$$Integrate[x^2 + y, x, y]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} y (2x^3 + 3xy) \end{bmatrix}$$

$$(٤) \int \int_{\ln x}^{\log x} (x^2 + y) dy dx$$

$$Integrate[x^2 + y, x, \{y, \text{Log}[x], \text{Log}[10, x]\}]$$

$$-\frac{1}{18\log[10]^2}x(-1+\log[10])(18(1+\log[10]) - x^2\log[100] - 3(6+6\log[10] - x^2\log[100])\log[x] + 9(1+\log[10])\log[x]^2)$$

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^1 \int_5^4 (x^2 + y + 4z^3) dz dy dx \quad (5)$$

$$\text{Integrate}[x^2 + y + 4z^3, \{y, 0, 1\}, \{x, x^2, \text{Sqrt}[x]\}, \{z, 4, 5\}]$$

$$\frac{1}{6}(2217\sqrt{x} + 2x^{3/2} - 2217x^2 - 2x^6)$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx \quad (6)$$

$$\text{Integrate}[\text{Sqrt}[x^2 + a^2], x]$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2}a^2\log[x + \sqrt{a^2 + x^2}]$$

ملاحظة:

في المثال الخامس لم نستخدم N مع التكامل لأن الجواب ليس عددي وإنما بدلالة x .

تمرين :

احسب مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

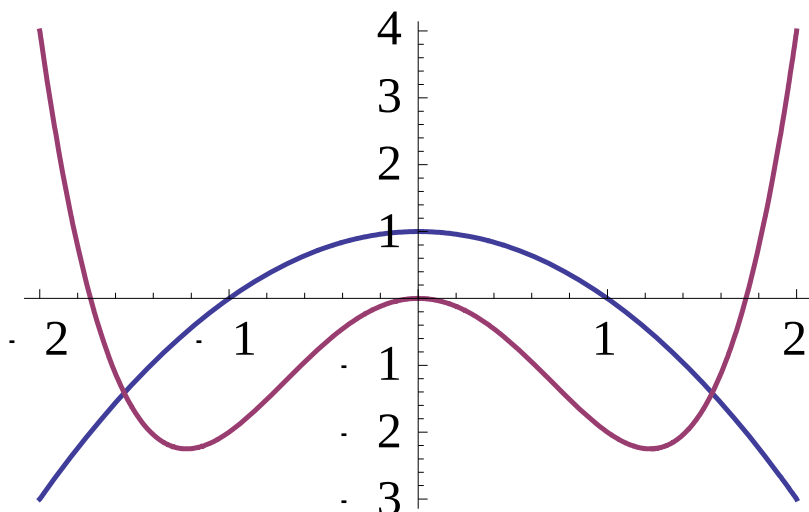
$$g(x) = x^4 - 3x^2 \quad , \quad f(x) = 1 - x^2$$

الحل :

$$f[x_] = 1 - x^2;$$

$$g[x_] = x^4 - 3x^2;$$

$$\text{Plot}[\{f[x], g[x]\}, \{x, -2, 2\}]$$



points = Solve[f[x] == g[x], x]

{{x → -i√-1 + √2}, {x → i√-1 + √2}, {x → -√1 + √2},
{x → √1 + √2}}

{a, b, c, d} = x/. points

{-i√-1 + √2, i√-1 + √2, -√1 + √2, √1 + √2}

NIntegrate[f[x] - g[x], {x, c, d}]

4.486647532296413

نعلم أن معادلة المستوي المماس لسطح معطى بالعلاقة $f(x, y, z) = 0$ في النقطة (x_0, y_0, z_0) تُعطى بالعلاقة :

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

تمرين :

حدد معادلة المستوي المماس للسطح $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ في النقطة $(1, 2, 3)$
ثم ارسم السطح والمستوي المماس .

الحل :

السطح المعطى هو سطح كرة مركزها $(0, 0, 0)$ ونصف قطرها $\sqrt{14}$ ومعادلتها تُعطى بالعلاقة :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$$

$$f[x_, y_, z_] := x^2 + y^2 + z^2 - 14;$$

$$a = \text{Derivative}[1, 0, 0][f][1, 2, 3](x - 1);$$

$$b = \text{Derivative}[0, 1, 0][f][1, 2, 3](y - 2);$$

$$c = \text{Derivative}[0, 0, 1][f][1, 2, 3](z - 3);$$

$$d = \text{Solve}[a + b + c == 0, z]$$

$$\{\{z \rightarrow \frac{1}{3}(14 - x - 2y)\}\}$$

$$g1 = \text{Graphics3D}[\text{Sphere}[\{0, 0, 0\}, \text{Sqrt}[14]]];$$

$$g2 = \text{Plot3D}[1/3(14 - x - 2y), \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}];$$

$$\text{Show}[g1, g2]$$

