كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

لدينا التابع f هو تابع دوري معرف بالشكل:

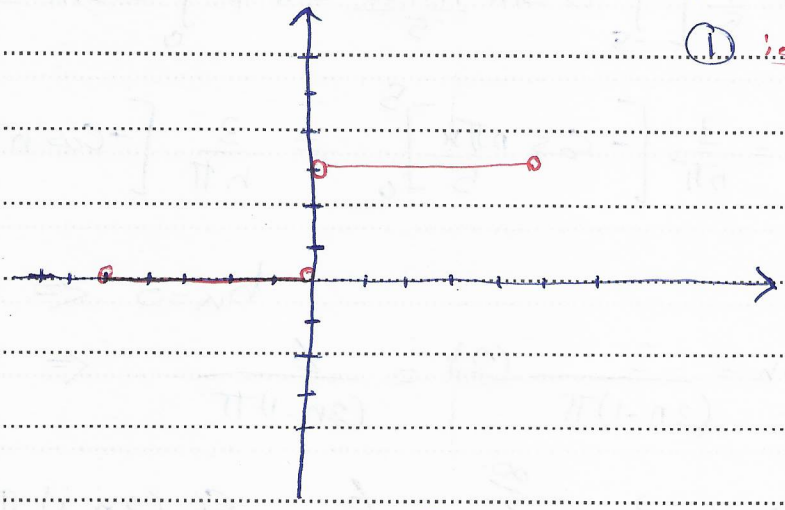
$$f(x)=\begin{cases}0 & : -5<x<0\\ 3 & : 0<x<5\end{cases}$$

① ارسم الخط البياني للتابع f.

② أوجد سلسلة فورية له.

③ عرف التابع g(x) على المجال [-5,5] بحيث تكون السلسلة متقاربة فيها واسم خطها البياني.

الحل: ①



② $$a_0=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\,dx=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}0\,dx+\int_{0}^{5}3\,dx\right]$$

$$a_0=\frac{1}{5}\left[0+[3x]_0^5\right]=3$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0=3}$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi}{5}x\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi}{5}x\,dx + \int_{0}^{5}3\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{3}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 0}$$

$$b_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 0\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5}3\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx\right]$$

$$b_n = \frac{3}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5 = \frac{3}{n\pi}\left[-\cos n\pi + 1\right]$$

$b_n = 0 \Leftarrow n = 2n$ لما

$b_n = \frac{3}{(2n-1)\pi}(2) = \frac{6}{(2n-1)\pi} \Leftarrow n = 2n-1$ ولما

$$f(x) \approx \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}$$

(3) بالمثل: إذا كانت الدالة سنجرة على فترة I ودورية ودورها $2T$ فإن:

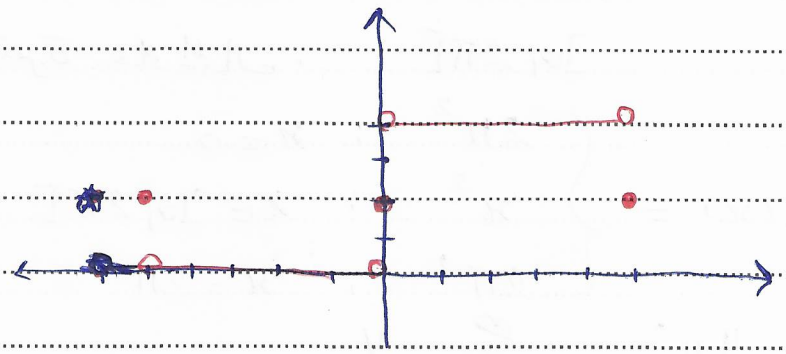
$$f(x_0) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi}{5}x_0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندما تكون الدالة غير مستمرة على المجال I عند النقطة x_0 وكانت دورية دورها $2T$ فإنّ:

$$\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2} = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)\pi} \sin\frac{(2n-1)\pi}{5} x_0$$

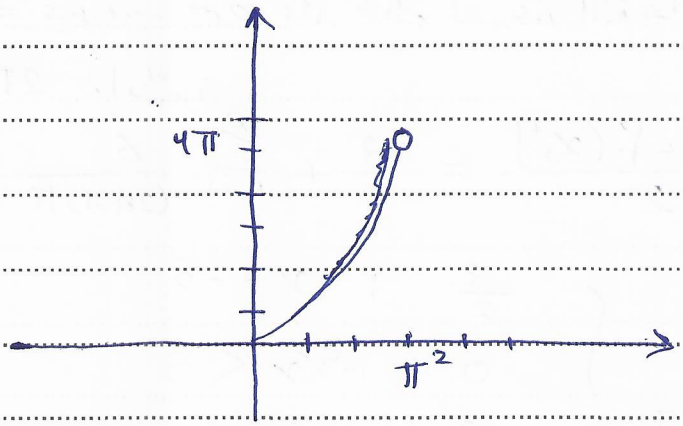
$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & ; \ x = -5 \\ 0 & ; \ -5 < x < 0 \\ \frac{3}{2} & ; \ x = 0 \\ 3 & ; \ 0 < x < 5 \\ \frac{3}{2} & ; \ x = 5 \end{cases}$$



ملاحظات: إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للكاملة على المجال $[a,b]$ فإنّ التكاملين $\int_a^b f(x)\cos nx\,dx$ و $\int_a^b f(x)\sin nx\,dx$ يتقاربان إلى الصفر عندما $n \to +\infty$ وبالتالي معاملات فوريه a_n, b_n تتقاربان إلى الصفر عندما $n \to +\infty$

تمرين: لدينا $f(x)=x^2$ دالة دورية على المجال $[0, 2\pi[$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



ومنها أن متسلسلة فورية لهذه الدالة هي:

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos n\pi - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$

الدالة مستمرة على المجال: $]0, 2\pi[$

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi^2 & ; \ x = 0 \\ x^2 & ; \ x \in]0, 2\pi[\\ 2\pi^2 & ; \ x = 2\pi \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التكاملات العمية (التكاملات المتلفة):

نعلم أنّه إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$ وهي قابلة للمكاملة على هذا المجال عندها نعرف التكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$ بأنّه موجود ومحدود بينما إذا كانت الدالة غير مستمرة على المجال $[a,b]$ مثلاً المجال $]a,b]$ أو $[a,b[$ أو $]a,b[$ هذا النوع من التكاملات يسمى التكاملات المتلفة أو العمية وقد تكون أطراف المجالات غير محدودة كالمجال: $[a,+\infty[$ أو $]-\infty,a]$ أو $]-\infty,+\infty[$ أما طريقة الحساب لها فنوجد نهاية التكامل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b}\int_a^x f(x)\,dx$$

مثال:

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \lim_{x\to 0}\int_{-1}^{x}\frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0}\left[\ln|t|\right]_{-1}^{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln|x| = -\infty$$

أي أنّ التكامل متباعد.

مثال: ادرس تقارب التكامل المتلف:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0) =$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ التكامل متقارب

أو لأن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{\pi}{2}$$

$$= \lim_{a\to\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \frac{\pi}{2}$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow$$ التكامل متقارب

* قد تكون النهاية غير موجودة كما في التكامل $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ فهو متباعد.

* دائماً يمكن تجزئة التكاملات إلى مجموع تكاملات عند الضرورة.

مثال: ناقش حسب قيم λ تقارب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\lambda}\,dt \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

عندما $\lambda = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{a\to 0} [\ln|t|]_a^1$$

$$= \lim_{a\to 0} [0 - \ln|a|] = +\infty$$

التكامل متباعد.

عندما $\lambda \neq 1$

$$I = \int_0^1 t^{-\lambda}\,dt = \lim_{a\to 0} \left[\frac{t^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_a^1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \lim_{a \to 0} \frac{1}{-\lambda+1} - \frac{a^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}$$

عندما $-\lambda+1 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$

$\Leftrightarrow$ متقارب $I = \frac{1}{1-\lambda}$

عندما $-\lambda+1 < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$ يكون التكامل متباعد إلى $+\infty$

مثال: ادرس تقارب التكامل: $I = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

$$I = \lim_{a \to -1} \int_{a}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \lim_{a \to -1} [\arcsin t]_{a}^{0}$$

$$I = [0 - \lim_{a \to -1} \arcsin a] = 0 - \arcsin(-1)$$

$I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ التكامل متقارب

لأن التابع $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ زوجي على المجال $]-1,1[$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_{0}^{} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة