كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

المتسلسلات المثلثية:

وهي من الشكل التالي: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

حيث a_n و b_n متتاليات عددية

مبرهنة:

إذا كانت المتسلسلتان العدديتان $\sum |a_n|$ و $\sum |b_n|$ متقاربتان فإن المتسلسلة المثلثية متقاربة طبيعياً وبالتالي متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ ومجموعها يكون دالة مستمرة.

* خواص دالة المجموع لمتسلسلة مثلثية:

1) إذا كانت المتسلسلة المثلثية متقاربة بانتظام على مجال I كانت دالة المجموع مستمرة.

2) كذلك إذا كانت المتسلسلة المثلثية الناتجة عن الاشتقاق حداً حداً متقاربة بانتظام فإن مجموعها هو مشتق الدالة $f(x)$ على المجال I.

$$\sum -n a_n \sin nx + n b_n \cos nx$$

نسميها المتسلسلة المشتقة المثلثية.

3) يمكن حساب a_n وفق المبرهنات الآتية:

يجب أن تكون دالة $f(x)$ دورية دورها $2T$ تعطى المعاملات لها بالعلاقة التالية:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\sin nx\,dx$$

ندعوها معاملات فورية و $2T$ دور الدالة

ملاحظة: بشكل خاص إذا كان مجال التسلسلة هو المجال $[0, 2\pi]$ تكون الدالة دورية دورها 2π وتصبح المعاملات:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

* عندما تكون الدالة زوجية: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

* عندما تكون الدالة فردية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

مشكلة هامة:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos x \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$$

ملاحظة هامة في معاملات فورييه على المجال $[-\pi, \pi]$:

① إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإنّ:

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \; ; \; a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$

② إذا كان $f(x)$ دالة فردية فإنّ:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

مثال: على دالة عددية دورية:

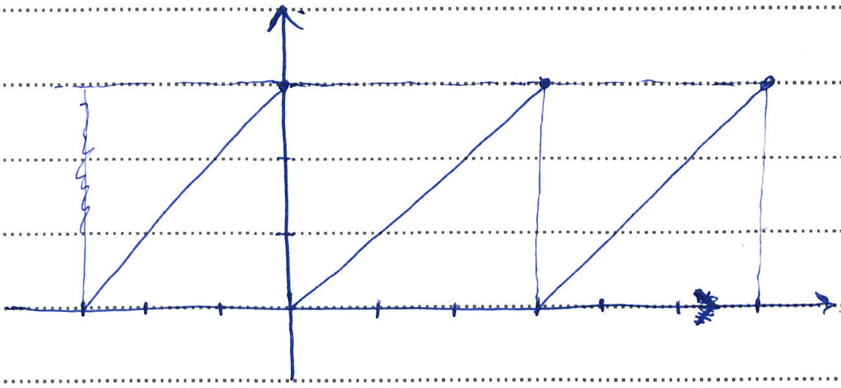
$$f(x) = x \quad ; \quad x \in [0, 3]$$

وهو دوري على هذا المجال ودوره $2\pi = 3$

$$f(x) = x \; ; \; x \in [0, 3]$$

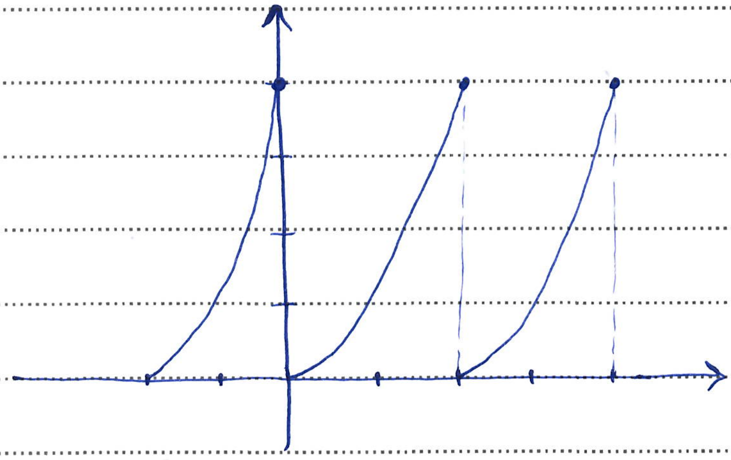
$$f(x) = x - 3 \; ; \; x \in [3, 6]$$

$$f(x) = x - 6 \; ; \; x \in [6, 9]$$



مثال

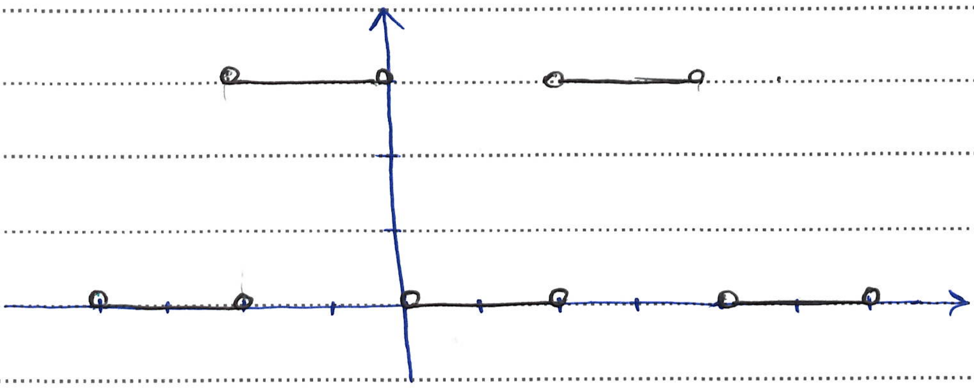
$f(x) = x^2 \;;\; x \in [0, 2[$



مثال

$$f(x) = \begin{cases} 3 & ; \; x \in]-2, 0[\\ 0 & ; \; x \in]0, 2[\end{cases}$$

دورة $2\pi = 2$



ملاحظة خاصة بمعاملات فورييه:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & ; \quad x \in]-2, 0[\\ 0 & ; \quad x \in]0, 2[\end{cases}$$

أوجد منشور فورييه للدالة $f(x)$

الحل:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 3\,dx + \int_{0}^{2} 0\,dx\right] = \frac{1}{2}[3x]_{-2}^{0} + 0 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 3\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} 0\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left[0 - \sin(-n\pi)\right] = \frac{3}{n\pi}[0-0] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 3\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} 0\,dx\right]$$

$$b_n = \frac{3}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} = \frac{3}{n\pi}\left[-1 + \cos(-n\pi)\right]$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left(-1 + (-1)^n\right)$$

$b_n = 0$ زوجية $n = 2n$ عندما *

فردية $n = 2n-1$ عندما *

$$b_n = \frac{-6}{(2n-1)\pi} \quad , \because (-1)^{2n-1} = -1$$

أصبحت سلسلة فورييه على الشكل التالي:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

يصبح هذا الشكل بقانون هو منشور فورييه للدالة

$$\Rightarrow f(x) \approx \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{(2n-1)\pi} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

مثال:

$$f(x) = x \quad ; \quad x \in [-\pi , \pi]$$

أوجد منشورها وفق سلسلة دورية وارسم مخططها البياني،

الحل:

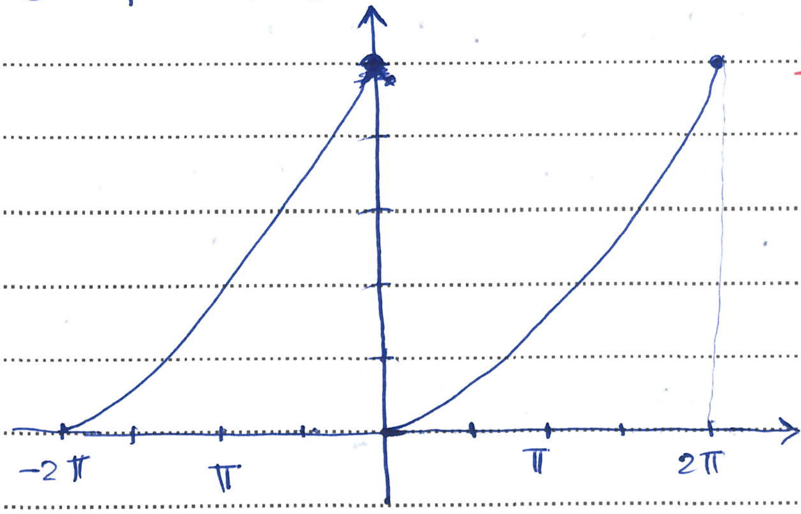
$$2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}\left[\pi^2 - \pi^2\right] = 0$$

مثال: أوجد منشور ~~محدود~~ التابع $f(x) = x^2$ على المجال $[0, 2\pi]$ وفق متسلسلة فورييه وارسم مخططها البياني أولاً.

الحل



إن التابع $f(x)$ زوجي على المجال المعطى لذلك فإن $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos n\pi x\,dx$$

تكامل بالتجزئة:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx$$

$u = x^2 \qquad dv = \cos nx\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \frac{1}{n}\sin nx$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int x \sin nx\,dx$$

نلاحظ أن التابع $f(x)=x$ هو تابع فردي على المجال المعطى

لذلك فإن $a_0=0$, $a_n=0$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

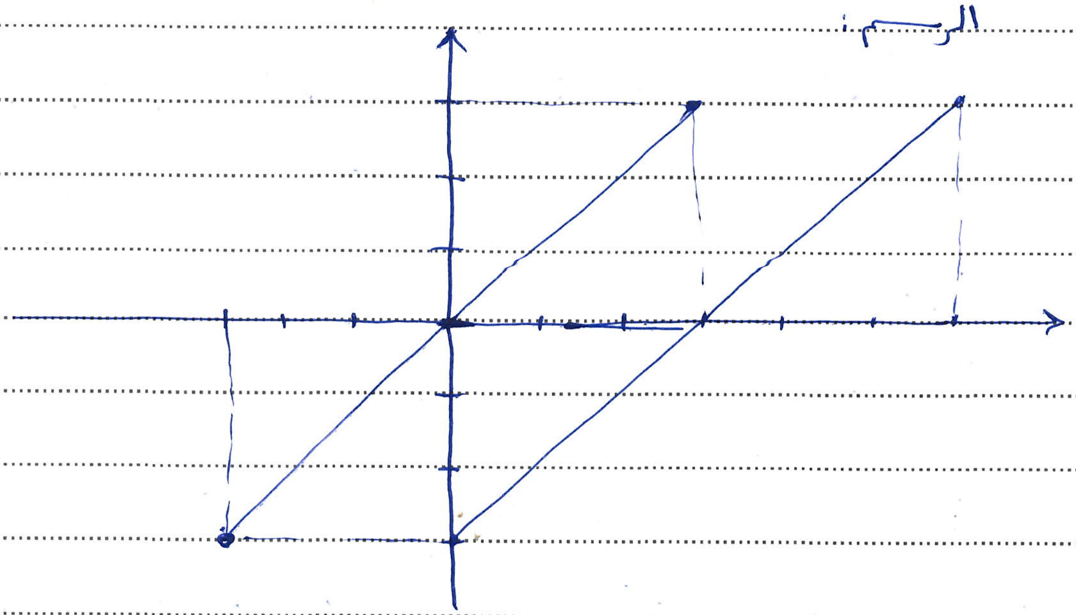
نكامل بالتجزئة :

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{n}(-1)^n-0+\frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_0^{\pi}\right]=\frac{-2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(x)\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

الرسم :



$$\Rightarrow \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = -\frac{2}{n}\left[\left[\frac{-x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\right]$$

$$= \frac{-2}{n}\left[\frac{-\pi}{n}\cos n\pi + \left[\frac{1}{n^2}\sin xn\right]_0^{\pi}\right] = \frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx .$$

ملاحظة: إذا كانت f دالة دورية ودورها 2π ومعرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للمكاملة على كل مجال جزئي من $\mathbb{R}$ عندئذٍ فإنَّ معاملات فورييه تسعى للصفر عندما $n \to +\infty$

ملاحظة: إذا كانت f دالة دورية ودورها 2π وقابلة للمكاملة على كل مجال جزئي من $\mathbb{R}$ ~~عندئذٍ فإنَّ معاملات فورييه~~ وكانت النهايتين عند قيمة ما مثل x للتابع من اليمين واليسار $f(x^+)$ و $f(x^-)$ وأنَّ التابع له مشتق من اليمين ومن اليسار عند x فإنَّ متسلسلة فورييه لدالة f متقاربة من النقطة x ومجموعها هو مجموع النهايتين على 2 .

انتهت المحاضرة