كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

وقرية: سلاسل القوى:

كل تابع مستمر يكون قابل للاشتقاق عدد غير منته من المرات وهذه المشتقات مستمرة ضمن التعريف المناسب لذلك نقول بأنه كل تابع يمكن نشره وفق متسلسلة قوى من الشكل: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ حيث تكون السلسلة الناتجة متقاربة وفق هذا التابع.

درسنا سابقاً تقارب سلاسل الدوال العددية و وجدنا أن هناك تقارب منتظم لبعض السلاسل من دالة $f(x)$ و درسنا التقارب المنتظم لها و بالتالي ندعو هذه السلسلة نشور الدالة $f(x)$ وفق متسلسلة و ليس بالضرورة أن تكون متسلسلة قوى، و وجدنا أيضاً أنه هناك سلاسل غير متقاربة فهي لا تمثل نشور لأي تابع أو دالة لذلك متسلسلات القوى تضمن التقارب لبعض التوابع بشرط أن تكون سلسلة هندسية متقاربة أي تحقق الشرط: $|x|<1$ أو $|x|<|x_0|$

علينا الآن نشر بعض التوابع المستمرة وفق متسلسلات قوى متقاربة ضمن شروط مناسبة للتقارب مثلاً: $|x|<1$ أو $|x|<|x_0|$ من هنا وجدنا لبعض السلاسل مجال التقارب ونصف قطر التقارب بسبب أنه التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق عدد غير منته من المرات و وجدنا أن معاملات متسلسلة القوى تعطى بالعلاقة:

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

وإذا أردنا الابتداء من الواحد نصبح بالشكل:

$$a_n = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad ; \quad f^{(0)}(a) = f(a)$$

نسمي السلسلة الموجودة بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

منشور تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة a

وإذا كان $a=0$ نسمي المنشور منشور ماك لوران:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \sim f(x)$$

$$f(x) \simeq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

لكل $\mu \in]a, x[$ نأخذ بحيث يكون التابع أكبر قيمة ممكنة.

نسمي العقدار $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}x^{n+1}$ بالشكل الإغرابي

الخطأ المرتكب في النشر أو باقي النشر وإذا سعى هذا المقدار إلى الصفر ومنه السلسلة أصبحت تسعى إلى $\infty+$ ونسمي السلسلة متسلسلة تايلور عندها:

نحصل على السلسلة التقاربية: $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

مثال: أوجد منشور الدالة الآتية حول الصفر

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: نأخذ مجال التقارب $]-1,1[$ وهو أصغر مجال تكون عليه الدالة متقاربة

$$f(x) = -\frac{x-1}{(1+x)^3} = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3}$$

نفرض $x = -t$

$$f(t) = \frac{-1}{(1-t)^2} + \frac{2}{(1-t)^3}$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad ; \quad |t|<1$$

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) t^{n-2}$$

$$f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) t^{n-2}$$

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(-1)^n x^{n-2}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n$$

تمرين: أوجد منشور مالاورات للدالة الأسية e^x على $\mathbb{R}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\mu}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\mu}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = |e^\mu| \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

وبالتالي سنتج أن e^x لها التسلسلة الآتية:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

تمرين: أوجد منشور ماكلوران للدالة $\sin x$ على $\mathbb{R}$

الحل

$f(x) = \sin x$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = +\cos x$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$ $\quad f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$ $\quad f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = +\sin x$ $\quad f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x$ $\quad f^{(5)}(0) = 1$

$$\sin x \simeq 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$\sin x \simeq \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} x^{n+1} \Rightarrow$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0 \; ; \quad |f^{(n+1)}(\mu)| < 1$$ يبرّر:

$$\sin x \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$f(x) = \cos x$ أوجد متشور ماكلورين للدالة تمرين:

الحل:

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f^{(3)}(x) = \sin x$	$f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(x) = 1$
$f^{(5)}(x) = -\sin x$	$f^{(5)}(x) = 0$

$$\cos x \simeq 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\cos x \simeq \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!} x^{n+1} \; ; \; \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

$$\cos x \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد منشور ماكلورين للدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$

الحل:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4},\quad f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1-x)^5}$$

$$f(x)\simeq 1+\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{3!}{3!}x^3+\cdots+\frac{n!}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$$

$$\frac{1}{1-x}\simeq 1+x+x^2+\cdots+x^n+R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0\Rightarrow \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

مثال: أوجد المنشور ماكلورين أجل الدالة:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

الحل:

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\frac{1}{1+x}\simeq 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+R_{n+1}(x)$$

$$\frac{1}{1+x}\simeq\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad ;\quad \lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{1}{1+x} \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$\ln|1+x|$ بمكاملة الطرفين نحصل على منشور التابع

$$\ln|1+x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

بوضع x^2 بدلاً من x نحصل على:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) x^{2n}$$

$\arctan(x)$ بمكاملة الطرفين نحصل على منشور الدالة:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

* - إيجاد المنشور من أجل الدالة $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة