كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : السابعة/نظري/

متسلسلات القوى: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

a_n معاملات متسلسلات القوى وبشكل خاص المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

مبرهنة آبل:

إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة من أجل $x = x_0$ فهي متقاربة من أجل جميع قيم x التي تحقق الشرط $|x| < |x_0|$

وإذا كانت متباعدة من أجل $x = x_0$ كانت متباعدة من أجل جميع قيم x التي تحقق الشرط $|x| > |x_0|$

البرهان:

عندما تكون متقاربة من أجل $x = x_0$ فإنّ السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بشرط $(a_n x_0^n)$ متقاربة من الصفر $\Leftarrow$

$|a_n x^n| < M$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \Rightarrow |x| < |x_0|$

$\Rightarrow \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| < |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \cdot q^n$ و $\left|\frac{x}{x_0}\right| = |q|$.

لتكن $\sum q^n$ متتالية هندسية أساسها $|q| < 1$

فالسلسلة الأولى متقاربة إطلاقاً فهي متقاربة.

مبرهنة: لكل سلسلة قوى من الشكل $\sum a_n x^n$ نعرف قطر التقارب r

حيث $|x| < r$ (أي: $-r < x < r$ ، $x \in]-r, r[$) أي

متقاربة مطلقاً بهذا الشرط وتكون متباعدة $|x| > r$ حيث
r عدد موجب بشكل خاص وعندما $r=0$ فهي متباعدة دوماً إلا
عندما $x=0$

وعندما $r=+\infty$ فهي متقاربة دوماً مع R
ندعو r بنصف قطر التقارب

ملاحظة: إذا كانت $r>0$ ⇐ المتسلسلة متقاربة طبيعياً فهي
متقاربة بانتظام على كل مجال $[a,b]$ حيث $-r<a<b<r$

*

★ طريقة إيجاد نصف قطر تقارب المتسلسلة السابقة $\sum a_n x^n$
نعتمد على أحد الاختبارين: اختبار كوشي أو اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = d$$

⇐ نصف قطر التقارب $r=\left|\frac{1}{d}\right|$

لأن:

① $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |d|\,|x|<1$$

$$\Rightarrow |x| = \frac{1}{|d|} = r$$

وتكون متباعدة خارج هذا المجال.

② $$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = d \Rightarrow r=\frac{1}{|d|}$$

مثال:

أوجد نصف قطر ومجال التقارب للسلسلة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

الحل:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad , \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$$

$d=1 \Leftarrow$ نصف قطر التقارب هو $r=1$ فالسلسلة

متقاربة على المجال $]-1,1[$ ، عندما $x=1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة.

عندما $x=-1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة (حسب ليبنز)

$\Leftarrow$ مجال التقارب هو $[-1,1[$

مثال ②: أوجد نصف قطر ومجال التقارب للسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

الحل

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{(n+1)}} \quad , \quad a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)2^{(n+1)}}}{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)2} = \frac{1}{2}$$

$d=\frac{1}{2} \Leftarrow r=2$ نصف قطر التقارب

$\Leftarrow$ مجال التقارب $]-2,2[$

عندما $x=2$ نحصل على السلسلة العددية $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة

عندما $x=-2 \Leftarrow \sum \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$

سلسلة متقاربة حسب ليبنز

مجال التقارب $[-2,2[$

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$

نفرض $y = x-2$ نحصل على $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$

$\boxed{x = y+2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

$r = 1 \Leftarrow d = 1$

ومجال التقارب: $y \in]-1,1[$

عندما $y=1$ نحصل على $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وهي متقاربة

عندما $y=-1$ نحصل على $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ وهي متقاربة (حسب ليبنتز)

$\Leftarrow$ مجال التقارب: $y \in [-1,1]$ ومنه: $x \in [1,3]$

مثال الحالات الخاصة:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$

$r = +\infty \Leftarrow d = 0$

فالسلسلة متقاربة دوماً أياً كانت $x \in \mathbb{R}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-5)^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$

$r = 0 \Leftarrow d = +\infty$

فالسلسلة متقاربة فقط من أجل $x = 0$

ملاحظات ونتائج:

1) بفرض لدينا السلسلتين: $\sum a_n x^n$ $]-r, r[$

$\sum b_n x^n$ $]-r', r'[$

فإن سلسلة الفرق أو المجموع: $\sum (a_n \mp b_n) x^n$

فيكون نصف قطر التقارب: $r'' = \inf(r, r')$

وفي حالة تساوي السلسلتين يكون نصف قطر التقارب الجديد:

$r'' \geq \inf(r, r')$

2) السلسلة المشتقة $\sum n a_n x^{n-1}$

والسلسلة الناتجة عن التكامل: $\sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

لهما نفس نصف قطر التقارب r.

بعض خواص متسلسلات القوى:

إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة من تابع $f(x)$ على مجال نصف قطره r عندئذٍ:

- التابع $f(x)$ مستمر على المجال $]-r, r[$ فهو حتماً قابل للاشتقاق ويكون مجموع سلسلة المشتقات $= f'(x)$

وتكون أيضاً السلسلة الناتجة عن التكامل حداً حداً متقاربة أيضاً من $\int f(x)$ على $[a, x[$ تحتوي مجال التقارب:

* معاملات متسلسلات القوى لها الشكل التالي:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{n}(0)$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$

$$f'(0) = 2a_2$$

$$f''(0) = 3!\, a_2$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1\times a_n + \cdots$$

$$f''(0) = n!\, a_n$$

$$a_n = \frac{f''(0)}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

مثال: يفرض $f(x) = e^x$ اكتب التابع بصيغة سلسلة قوى $\sum a_n x^n$

الحل:

$$f(x) = e^x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n$$

تمرين: أوجد نصف قطر و مجموع السلسلة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

الحل:

السلسلة $\sum_{n=0} x^n$ سلسلة متقاربة ونصف قطر التقارب هو $r=1$ $\Leftarrow$ مجال التقارب $]-1,1[$

سلسلة المشتقات أيضاً يكون لها قطر التقارب ذاته
ومجال التقارب هو $]-1,1[$

السلسلة $\sum x^n$ هندسية مجموعها $f(x) = \frac{1}{1-x}$

السلسلة $\sum n x^{n-1}$ مجموعها $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

أيضاً لدينا السلسلة $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ متقاربة ومنه:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt$$

$$= [-\ln|1-t|]_0^x = -\ln(1-x)$$

تمرين: أوجد نصف قطر ومجال التقارب $\sum (-1)^n n\, 2^n x^{n-1}$

الحل:

نأخذ سلسلة القيمة المطلقة: $\sum_{n=1}^{\infty} n\, 2^n x^{n-1}$

$a_{n+1} = (n+1)\, 2^{(n+1)}$,

$a_n = n\, 2^n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)\, 2^{n+1}}{n\, 2^n} = 2$$

$d = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

ومجال التقارب هو: $]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$

عندما $x = \mp\frac{1}{2}$ تكون أيضاً متقاربة وبالتالي مجال التقارب

$[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$

لنفرض أن: $f(x) = \sum (-1)^n n\, 2^n x^{n-1}$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2x)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-2x)^n = \frac{1}{1+2x} = f(x)$$

نشتق التابع $f(x)$ فيكون:

$$f(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2} = \sum (-1)^n\, n\, 2^n x^{n-1}$$

ملاحظة ①: نشر تابع في متسلسلة قوى: نقول أن التابع f قابل للنشر في متسلسلة قوى في جوار x_0 إذا وجد عدد حقيقي r ومتسلسلة قوى متقاربة $]x_0-r, x_0+r[$ نسميها x_0 مركز النشر ونعو النشر عندئذ نشر تايلور.

وفي هذه الحالة يكون التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق في أي مرتبة.

ملاحظة ②: عند نشر تابع في متسلسلة قوى يكون قد أخطأنا بمقدار ندعوه الخطأ في التقريب وكلما كان هذا الخطأ صغير باختيار مجالات تقارب مناسبة كان النشر أكثر دقة وأقرب إلى التابع.

انتهت المحاضرة