كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تعريف: تكون متسلسلة الدوال $\sum f_n$ متقاربة بانتظام إذا كانت متتالية الدوال f_n متقاربة على مجموعة تعريف D_f

نتيجة: إذا كانت متسلسلة الدوال متقاربة بانتظام على D حتماً تكون متقاربة نقطياً.

أما العكس إذا كانت المتسلسلة متقاربة نقطياً فإنّ الشرط اللازم والكافي لتكون متقاربة بانتظام:

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists N(\varepsilon) : n>N(\varepsilon) \Rightarrow \forall x\in D : \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

- اختبار كوشي للتقارب المنتظم:

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists N(\varepsilon) ; \; n>N(\varepsilon) , \; p,q>N(\varepsilon)$$

$$\left| \sum_{n=p}^{p+q} f_n(x) \right| = \left| f_p(x) + f_{p+1}(x) + \cdots + f_{p+q}(x) \right| < \varepsilon$$

نتيجة: إذا كانت المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بانتظام على D فإنّ المتتالية $f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية.

تعريف: نعرف لدينا المتسلسلة $\sum f_n(x)$ متسلسلة الدوال الحقيقية نقول إنها متقاربة طبيعياً إذا كانت متسلسلة القيم المطلقة للدوال f_n متقاربة بانتظام على D

$\Leftarrow \sum f_n(x)$ متقاربة طبيعياً.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

برهنة: السلسلة المتقاربة طبيعياً هي سلسلة متقاربة بانتظام على D

لأن:

$$\left|\sum_{n=p}^{p+q} f_n(x)\right| \leq \sum |f_n(x)| < \varepsilon$$

برهنة فايرشتراس: لتكن السلسلة f_n سلسلة من الدوال العددية المعرفة على D فإذا وجدت سلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ حيث $|f_n(x)| < U_k$ وكانت هذه السلسلة U_k متقاربة كانت السلسلة مجموع $\sum f_n(x)$ متقاربة طبيعياً.

برهنة: يفرض لدينا السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة من الدوال المستمرة على D ومتقاربة من دالة المجموع F على D عندئذٍ تكون F دالة مستمرة إذا كان التقارب منتظم على D ويكون

$$\lim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim f_n(x) = f_n(x_0)$$

عندما $x \to x_0$

$n \to \infty$

مثال: لدينا $\sum f_n$ سلسلة من الدوال المعرفة بالشكل: $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ ادرس التقارب المنتظم للسلسلة.

الحل:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2+x^2} < \frac{1}{n^2}$$

والسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

وبالتالي اعتماداً على برهنة فايرشتراس تكون $\sum f_n(x)$ متقاربة طبيعياً وبالتالي متقاربة بانتظام.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- الدوال $f_n(x)$ السابقة هي دوال مستمرة على R والسلسلة $\sum f_n(x)$ متقاربة بانتظام هذا يعني أن مجموع السلسلة وليكن $f(x)$ هو دالة مستمرة.

مبرهنة:

لتكن لدينا السلسلة $\sum f_n$ سلسلة من الدوال المستمرة على $[a,b]$ ومتقاربة بانتظام عليه فإنّ التوابع f_n قابلة للمكاملة وبالتالي نحصل على سلسلة التوابع الأصلية للسلسلة f_n تكون متقاربة بانتظام من التابع الأصلي $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{عدد}$$

لأنّ: $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$

$$f(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad ; \quad x \le b$$

ويكون:

$$f_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$$

نحصل على السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$

$$f(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\sum \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \sum f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$$

تمرين: $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام من الدالة f على $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ أثبت أنّ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لدينا $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

والسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ هي سلسلة متقاربة فالسلسلة $\frac{1}{n^2}$ متقاربة

وبالتالي $\sum f_n$ متقاربة طبيعياً فهي متقاربة بانتظام من دالة $f(x)$

أي أن $f(x) = \sum f_n(x)$ والدوال $f_n(x)$ هي دوال مستمرة

على $[0, \frac{\pi}{2}]$ يمكن الكتابة:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{\cos nx}{n^2}\,dx = \sum \frac{\sin nx}{n^3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3}$$

$$= \sum \frac{(2n+1)^n \frac{\pi}{2}}{(2n+1)^3} = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

ملاحظة: إذا كانت $\sum f_n(x)$ متقاربة بانتظام فإن المتتالية $f_n(x)$ تكون متقاربة من الدالة الصفرية بانتظام

مبرهنة: إذا كانت السلسلة $\sum f_n(x)$ سلسلة من الدوال المستمرة على $[a,b]$ ومتقاربة من دالة $f(x)$ على $[a,b]$ وكانت السلسلة $\sum f'_n(x)$ سلسلة مشتقات متقاربة بانتظام على $[a,b]$ فإن الدالة f تكون قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ ويكون

$$f'(x) = \sum f'_n(x)$$

مثال: لتكن لدينا $\sum f_n(x)$ المعرفة بالشكل: $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan nx$

① أثبت أن $\sum f_n(x)$ متقاربة وأنه يحدها f هو دالة مستمرة على $\mathbb{R}$

② أثبت أن f قابلة للاشتقاق $[a,\infty[$ حيث $a>0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{-\pi}{2} < \arctan nx < \frac{\pi}{2}$$ ① الحل:

$$\frac{-\pi}{2n^2} < \frac{1}{n^2}\arctan nx < \frac{\pi}{2n^2}$$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n^2}\arctan nx\right| < \frac{\pi}{2n^2}$$

$x \in R$ من أجل

السلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة بالتالي حسب مبرهنة فايرشتراس السلسلة المعطاة سلسلة متقاربة بالتالي متقاربة بانتظام على R وتجوعها f.

② الدالة $f_n(x)$ هي دوال مستمرة على R وبالتالي f هي دالة مستمرة أيضاً على R ومشتقات هذه الدوال هي على الشكل التالي:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

وهي دوال مستمرة على R

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{1}{n(1+n^2x^2)}\right| < \frac{1}{n^3\alpha^2} \quad ; \quad x \geq \alpha$$

$x \in [\alpha, +\infty[$

وهي سلسلة متقاربة وبالتالي تكون السلسلة متقاربة طبعاً فهي متقاربة بانتظام وتكون الدالة f(x) قابلة للاشتقاق من أجل كل $x > \alpha$ ويكون

$$f'(x) = \sum \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة