كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين: لتكن المتتالية $(f_n(x))$ متتالية من التوابع المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل:

$$f_n(x) = \frac{n e^{-x}}{2n+x}$$

① أثبت أن $(f_n(x))$ متقاربة بانتظام من دالة يطلب تعيينها على المجال $[0,1]$

② برهن أنّ: $\lim_{n\to\infty} S_n$ حيث $S_n = \int_0^1 \frac{n e^{-x}}{2n+x}$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2}$$

المتتالية متقاربة نحو تابع الدالة $f(x) = \frac{e^{-x}}{2}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n e^{-x}}{2n+x} - \frac{e^{-x}}{2} \right| = \left| \frac{(n-2n-x)e^{-x}}{2(2n+x)} \right|$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x e^{-x}}{2(2n+x)} < \frac{1}{4n} < \varepsilon$$

$$4n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right] + 1$$

بالتالي المتقاربة منتظم:

$$S_n = \int_0^1 \frac{n e^{-x}}{2n+x}\,dx \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n e^{-x}}{2n+x}\,dx$$

بما أن المتتالية $(f_n(x))$ متقاربة بانتظام من الدالة $f(x) = \frac{e^{-x}}{2}$

المستمرة على $[0,1]$ $\Leftarrow$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{n e^{-x}}{2n+x}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2}\,dx = \left[\frac{-e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{-1}{2e} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{e-1}{2e}$$

* ملاحظة: إن شرط التقارب المنتظم للمتتالية $(f_n(x))$ نحو الدالة $f(x)$ هو شرط كافي وغير لازم حتى يكون:

$$\lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

تمرين: لدينا المتتالية $(f_n(x))$ حيث $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ المعرفة على المجال $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

المتتالية متقاربة نقطياً نحو الدالة الصفرية

ولدينا: $$\lim \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

ولكن التقارب غير منتظم لأن:

$$\exists\, x_n = \frac{1}{n} \;;\; |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$$

أي

$$\sup |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{2}$$

وبالتالي التقارب غير منتظم.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: احسب النهاية: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx$

الحل: نأخذ متتالية الدوال $(f_n(x))$ حيث:

$$f_n(x) = x^n (1-x)^n$$

نوجد التقارب:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n (1-x)^n = 0 \quad ; \quad x \in [0,1[$$

وعندما $x = 1$ نجد أن:

$$f_n(1) = 0$$

فهي متقاربة على المجال $[0,1]$ نحو الدالة الصفرية.

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n (1-x^n) - 0| = |x^n (1-x)^n|$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |(x - x^2)^n|$$

ليكن لدينا $g(x) = x - x^2$ ولنوجد القيمة الحدية الكبرى لهذا التابع:

$$g'(x) = 1 - 2x \iff g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

$$g(x) < \frac{1}{4}$$

$$\sup |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0 \Rightarrow$$ التقارب منتظم

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon \Rightarrow 4^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n\ln 4 > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$ أي

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln 4} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(4)}\right] + 1$$

ومنه التقارب منتظم.

$$\Rightarrow \lim \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} x^n (1-x)^n dx = \int_0^1 0\, dx = 0$$

برهنة: لتكن $(f_n(x))$ متتالية من الدوال متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$

ونفرض أن التوابع $(f_n(x))$ لها مشتقات مستمرة ومحدودة على المجال $[a,b]$ وأن المتتالية $(f'_n(x))$ وهي متتالية المشتقات على المجال $[a,b]$ ومشتقها $f'(x)$ يعطى بالشكل:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d f_n(x)}{dx}$$

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

البرهان: لنفرض أن المتتالية $(f'_n(x))$ متتالية متقاربة بانتظام من الدالة $g(x)$ على $[a,b]$ عندئذٍ تكون قابلة للمكاملة على كل مجال $[a,x]$ حيث: $x \le b$

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f'_n(t)\,dt$$

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left[f_n(t)\right]_a^x = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(a)\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

بما أن g مستمرة على المجال $[a,b]$ فإن الدالة f اشتقاقية ومشتقها f' ويساوي $g(x)$ أي أن:

$$g(x) = f'(x) \Rightarrow f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

مثال: لدينا المتتالية $(f_n(x))$ متتالية من الدوال المعرفة بالشكل

$f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$ على المجال $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$$

إن المتتالية متقاربة نقطياً من التابع $f(x)=1$

$$f'_n(x) = \frac{2x+2n-2x-n}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2}$$

وهي توابع مستمرة ومحدودة على المجال $[0,1]$ ولندرس التقارب المنتظم لها وهي متقاربة من الدالة: $g(x)=0$

$$\sup|f'(x)-g(x)| = \frac{n}{(x+n)^2} < \frac{1}{n}$$

$$\sup|f'_n(x)-g(x)| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وعنه التقارب منتظم وبالتالي فإن:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$g(x) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تقارب سلسلة الدوال التوابع العددية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

حيث $(f_n(x))$ متتالية من الدوال الحقيقية المعرفة على D

تكون هذه السلسلة متقاربة نقطياً إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية متقاربة (S_n)

$$S_n = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

إذا كانت هذه المتتالية متقاربة نقطياً كانت السلسلة متقاربة نقطياً ونسمي نهاية S_n حيث $n \to \infty$ مجموع السلسلة العددية

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} S_n$$

مثال: السلسلة الهندسية: $f_n(x) = x^n$ على المجال $]-1,1[$

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 1\,\frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Leftarrow f(x) = \frac{1}{1-x}$$ متقاربة نقطياً بـ S_n

ملاحظة: من أجل $x = 1$ تكون

$$S_n = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ مرة}}$$

$$S_n = n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$$

المتتالية متباعدة $\Leftarrow$ السلسلة متباعدة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: نقول أن سلسلة الدوال متقاربة بانتظام إذا كانت متتالية الدوال $f_n(x)$ متقاربة بانتظام.

نتيجة (1): إذا كانت متسلسلة الدوال متقاربة بانتظام فهي حتماً متقاربة نقطياً.

نتيجة (2): إذا كانت السلسلة متقاربة نقطياً فإنّ الشرط اللازم والكافي لتكون متقاربة بانتظام هو الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ n>N(\varepsilon)\Rightarrow \forall x\in D:\ \left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)\right|<\varepsilon$$

انتهت الإجابة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة