كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

متتاليات الدوال الحقيقية:

$(f_n(x))$ أيًا كانت $x \in D$ متتالية من الدوال المتقاربة من التابع $f(x)$ عندئذٍ نكتب: $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ ونقول بالتقارب النقطي، وعبارة رياضية تعني:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_{(\varepsilon, x)} ; n > N_{(\varepsilon, x)} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

مثال: $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$ و $D_f = \mathbb{R}$

ادرس التقارب لهذه المتتالية؟

الحل:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$$

وبما أن متتالية الدوال $(f_n(x))$ تتقارب من الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ نقطياً

مثال: $f_n(x) = \frac{x}{n+1}$ و $D_f = \mathbb{R}$

ادرس تقارب هذه المتتالية؟

الحل:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = 0}$$

وبما أن متتالية الدوال $(f_n(x))$ تتقارب نقطياً من الدالة $\boxed{f(x) = 0}$

مثال:

$f_n(x) = x^n \quad ; \quad x \in [0,1]$

ادرس استمرار متتالية الدوال $(f_n(x))$ على المجال: $[0,1]$؟

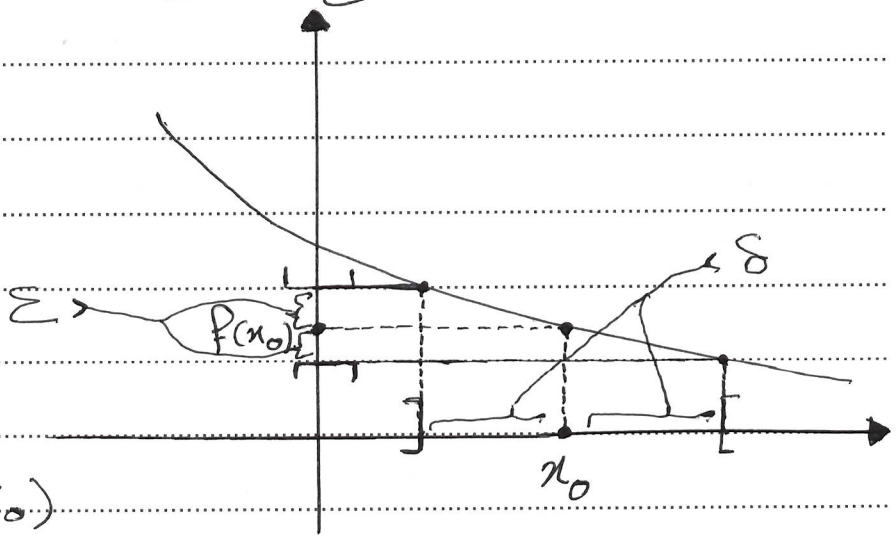
الحل:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in [0,1[\\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \neq f(1)$ وبه فإن التابع $f(x)$ غير مستمر عند $x = 1$.

وبه فهو غير مستمر على المجال: $[0,1]$.

شرط استمرار تابع عددي عند نقطة:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\forall \delta > 0 ; |x - x_0| < \delta \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 ; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

مثال:

$f_n(x) = x^n (1 - x^2)^n \quad ; \quad x \in [0,1]$

هل المتتالية متقاربة وهل التابع الناتج مستمر؟

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = 0}$$

وبما المتتالية $(f_n(x))$ متقاربة نقطياً من الدالة $f(x) = 0$ ونلاحظ أن التابع: $f(x) = x^n(1-x^2)^n$ معرف على المجال: $[0, 1]$.

ملاحظة: كل تابع له قاعدة ربط واحدة معرف على مجموعة تعريفه

مثلاً: التابع: $f(x) = \frac{1}{x}$ معرف على المجال: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

التقارب المنتظم لمتتاليات الدوال:

نفرض لدينا المتتالية $(f_n(x))$ متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)$ على D عندئذٍ نقول أن التقارب منتظم إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \forall x \in D \; \exists N_{(\varepsilon)} ; n > N_{(\varepsilon)} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

نتيجة:

إذا كانت المتتالية $(f_n(x))$ متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ كانت متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)$ حتماً على D.

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لتكون متتالية الدوال $(f_n(x))$ متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على D هو أن يكون: $\sup|f_n(x) - f(x)|$ متقارب من الصفر.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

شرط كوشي لتقارب المنتظم:

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists N_{(\varepsilon)} ; n>N_{(\varepsilon)} , p>N_{(\varepsilon)} , q>N_{(\varepsilon)} \Rightarrow |f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon$$

مثال: لتكن لدينا متتالية الدوال الآتية: $f_n(x)=\frac{x}{n+x^2}$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

ادرس التقارب المنتظم لهذه الدالة؟

الحل:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow \boxed{f(x)=0}$$

$(f_n(x))$ متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)=0$ لدراسة التقارب المنتظم نحاول ايجاد $\sup|f_n(x)-f(x)|$ نأخذ التابع:

$$g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n+x^2}\right|=\frac{|x|}{n+x^2}$$

نلاحظ أن التابع زوجي متناظر بالنسبة لـ $y'y$ لذلك ندرس التقارب على المجال: $x\in[0,+\infty[$ عندئذٍ:

$$g_n(x)=\frac{x}{n+x^2}$$

$$g_n'(x)=\frac{x^2+n-2x^2}{(n+x^2)^2}=\frac{n-x^2}{(n+x^2)^2}$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow x^2=n \Rightarrow x=\sqrt{n} \Rightarrow g_n(\sqrt{n})=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{n}$		0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	↗	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	↘	0

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ومنه نجد أن:

$$\sup|g_n(x)| = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

التقارب منتظم $\Rightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$

تمرين: لدينا متتالية الدوال $(f_n(x))$ التي حدها العام هو:

$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$; $x \in [0,1]$

ادرس التقارب المنتظم لهذه المتتالية؟

الحل:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = 0}$$

وهنه المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)=0$

نأخذ التابع:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |x^n\sqrt{1-x^2}| = x^n\sqrt{1-x^2} \; ; x \in \mathbb{R}$$

$$g_n'(x) = n x^{n-1}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g_n'(x) = \frac{n x^{n-1}(1-x^2) - x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{n-1}(n(1-x^2) - x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g_n'(x) = \frac{x^{n-1}(n - (n+1)x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g_n'(x) = 0 \Rightarrow$$ إما $x^{n-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g_n(0) = 0$

أو $n - (n+1)x^2 = 0 \Rightarrow (n+1)x^2 = n \Rightarrow x^2 = \frac{n}{n+1}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x=\sqrt{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow g_n\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)=\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n\sqrt{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n+1}}=0 \Rightarrow$ التقارب منتظم

مثال:

$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$

ادرس التقارب المنتظم على كلٍّ من المجالين: $[1,+\infty[$ و $[0,+\infty[$ ؟

الحل:

نلاحظ أن: $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow \boxed{f(x)=0}$

وبما أن المتتالية $(f_n(x))$ متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)=0$ على المجال $[1,+\infty[$ عندئذٍ: $x\geq 1$

نأخذ التابع: $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{nx}{n^2x^2}$

$g_n(x)<\frac{1}{nx} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nx}=0$

وبالتالي التقارب منتظم على المجال $[1,+\infty[$.

أما على المجال $[0,+\infty[$ فنلاحظ أنه يوجد عدد طبيعي لا جاري الصفر حيث يمكن أن نفرض $x=\frac{1}{n}$ ثم عندئذٍ:

$|f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{2}$

أي أنها لا تسعى إلى الصفر فتقارب غير منتظم على المجال $[0,+\infty[$.

استمرار متتاليات الدوال:

إذا كانت المتتالية $(f_n(x))$ متتالية من الدوال المعرفة على D ومتقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ فإن دالة النهاية تكون دالة مستمرة لأن:

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists N_{(\varepsilon)} ; \; n>N_{(\varepsilon)} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \forall \delta>0 ; |x-x_0|<\delta \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists N_{(\varepsilon)} ; \; n>N_{(\varepsilon)}$$

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)|$$

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|$$

حالة خاصة — استمرار — تقارب

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$$

فالدالة مستمرة عند x_0.

نتيجة:

لتكن $(f_n(x))$ متتالية من الدوال المستمرة و المتقاربة نقطياً من الدالة $f(x)$ غير المستمرة عندئذٍ تكون الدالة $(f_n(x))$ غير متقاربة بانتظام.

مثال: ليكن لدينا متتالية الدوال التالية: $f_n(x)=\dfrac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)}$

ادرس التقارب المنتظم على المجال $[0,2]$ ثم على المجال: $[-2,2]$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \begin{cases} x-2 & ; \; x\neq -2 \\ 0 & ; \; x=-2 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ أن هذه الدالة غير متعرفة عند $x=-2$

لندرس التقارب على المجال: $[0,2]$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)} - (x-2)\right| = \left|\frac{2-x}{1+n(x+2)}\right|$$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{2-x}{1+n(x+2)}\right| < \frac{2}{1+2n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Leftarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow n > 1 \Leftarrow N_{(\varepsilon)} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1 \Leftarrow \text{التقارب منتظم}$$

بينما على المجال: $[-2,2]$ التقارب غير منتظم لذن دالة النهاية غير متعرفة عند $x=-2$

ملاحظة: إن الشرط لتكون متتالية الدوال متقاربة بانتظام هو شرط كافي لتكون دالة النهاية متعرفة.

مثال:

$f_n(x) = x^n$ و $x \in [0,1[$

هي متعرفة على المجال: $[0,1[$ ومتقاربة نقطياً من الدالة الصفرية على هذا المجال و $f(x)=0$ متعرفة ولكن $\sup|x^n-0| = 1$ هذا يعني أن التقارب غير منتظم.

مبرهنة:

نفرض أن متتالية الدوال $(f_n(x))$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على المجال: $[a,b]$، ونفرض أنها متعرفة على هذا المجال ونهايتها $f(x)$ متعرفة على هذا المجال عندئذٍ متتالية الدوال الأصلية للمتتالية $(f_n(x))$ تتقارب متقاربة من الدالة الأصلية لدالة $f(x)$.

أي: $F(x) \Rightarrow (F_n(x)) \xrightarrow{\text{تقارب من}} f(x) \Rightarrow (f_n(x)) \xrightarrow{\text{تقارب من}}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z