كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : **الثالثة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

اختبار رابب:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=k$$

عندما $k>1$ تكون السلسلة تقاربية.

عندما $k<1$ تكون السلسلة متباعدة.

عندما $k=1$ حالة شك

مثال: ادرس تقارب السلسلة $\sum a_n$ حيث:

$$a_n=\left[\frac{1,4,7\cdots(3n-2)}{3,6,9\cdots(3n)}\right]^2$$

الحل:

$$a_{n+1}=\left[\frac{1,4,7,\cdots(3n+1)}{3,6,9,\cdots(3n+3)}\right]^2$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left[\frac{1,4,7\cdots(3n-2)}{3,6,9,\cdots(3n)}\right]^2}{\left[\frac{1,4,7,\cdots(3n+1)}{3,6,9,\cdots(3n+3)}\right]^2}=\frac{(3n+3)^2}{(3n+1)^2}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^2$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{9n^2+18n+9-9n^2-6n-1}{9n^2+6n+1}=\frac{12n+8}{9n^2+6n+1}$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{12n^2+8n}{9n^2+6n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+8n}{9n^2+6n+1} = \frac{12}{9} > 1$$

السلسلة متقاربة

السلسلة المتناوبة:

هي السلسلة من الشكل: $\sum_{n=0}^{\infty} U_n \; ; \; U_n = (-1)^n a_n$

حيث $a_n$ متتالية ذات حدود موجبة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{n+1}$$

* اختبار ليبنز لتقارب السلاسل المتناوبة:

إذا كانت المتتالية $a_n$ ذات حدود موجبة و متناقصة و نهايتها تساوي الصفر عندئذٍ تكون السلسلة المتناوبة متقاربة

كمثال على ذلك الأمثلة السابقة $a_n = \frac{1}{n+1}$ ذات حدود موجبة وهي متناقصة و لدينا أيضاً: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

هذا يعني أن السلاسل المتناوبة السابقة متقاربة.

لتكن لدينا $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ لنفرض أن نهايتها S أي:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

عندئذٍ تكون:

$$S_{2p} \leq S \leq S_{2p+1}$$

إذا السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ متقاربة و مجموعها يساوي $\ln 2$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2p} < \ln 2 < \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1}$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لكن نعلم أن $\sum \frac{1}{n+1}$ متباعدة

$\Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة شرطياً.

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{2n}$$

الحل:

$a_n = \sin\frac{\pi}{2n}$ متناقصة ومحدودة موجبة ونهايتها تساوي الصفر

فالسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{2n}$ متقاربة.

ولكن حسب برهنة النهاية: $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$

ومنه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$ متباعدة.

$\Leftarrow$ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{2n}$ متقاربة شرطياً.

مثال: ادرس تقارب السلسلة: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n^2\pi}{n\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$

الحل:

$a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ متتالية متناقصة وذات حدود موجبة ونهايتها صفر ومنه فإن السلسلة متقاربة.

اختبار آبل:

لتكن لدينا السلسلة $\sum (-1)^n a_n$ ولتكن $a_n$ متتالية الحد العام بفرض أن $a_n$ متتالية ذات أعداد حقيقية بحيث يكون:

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

متتالية محدودة وبفرض لدينا متتالية أخرى نرمز لها $(\varepsilon_n)$ متناقصة وذات حدود موجبة ونهايتها صفر عندئذٍ السلسلة:

$\sum \varepsilon_n a_n$ تكون سلسلة متقاربة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: يمكن لدينا المتتالية الآتية $a_n=(-1)^n$ نهاية السلسلة $\sum (-1)^n \varepsilon_n$ تكون متقاربة وهي حالة خاصة من اختبار أبل

مثال: لدينا السلسلة الآتية: $\sum \varepsilon_n \cos n\alpha$ حيث $|\varepsilon_n|$

في المثال السابق: $a_n = \cos n\alpha$

$$S_n = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha$$

$$S_n = \cos\frac{n+1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{n}{2}\alpha \Big/ \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$|S_n| \le \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$ وهي متتالية محدودة

فالسلسلة $\sum \varepsilon_n \cos \alpha n$ متقاربة

الجداءات اللانهائية:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \cdots$$

$a_n$ الحد العام للجداء اللانهائي

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$

إذا كانت المتتالية $P_n$ متقاربة $\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$ يكون الجداء المتقارب يساوي $P$

أما إذا كانت النهاية تساوي الصفر أو غير موجودة تكون متباعدة

مثال: أدرس تقارب الجداء:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$P_2 = 1-\frac{1}{2}, \quad P_2 = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)$$

$$P_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$P_n = \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdots\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$P_n = \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\cdots(n-1)(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdots n^2}$$

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

أو باستخدام العاملة:

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)!\,(n+1)\,n!}{((n-1)!\,n)\,n!}$$

$$P_n = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ فالجداءات متقاربة وتساوي}$$

ملاحظة: الشرط اللازم وغير الكافي لتكون سلسلة الجداءات متقاربة هو أن تكون نهاية حدها العام يساوي الواحد ولكن ليس بضرورة أن تكون متقاربة.

مثال: لتكن سلسلة الجداءات:

$$\prod_{n=2}^{\infty} a_n = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

ولنأخذ المتتالية $\ln(a_n)$ فنحصل على سلسلة من الشكل

مجموع $\ln(a_n)$ وإذا كانت هذه السلسلة متقاربة تكون سلسلة الجداءات متقاربة.

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$$

مثال:

واضح أن $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ قد تكون متقاربة.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$P_n = e \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{1}{n}}$

$\ln P_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n}$

وهي سلسلة متباعدة $\Leftarrow$ $P_n$ متباعدة وهذه جزء سلسلة

الجداءات تكون سلسلة متباعدة

تمرين: ادرس تقارب السلاسل:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{(n+1)}} \times \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^3}{n^3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ متقاربة

(2) $\sum \frac{2^{2n}}{n^3 \cdot 3^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n^3 \cdot 3^n}} = \frac{4}{(\sqrt[n]{n})^3 3}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow$ متباعدة

(3) $\sum \frac{6^n}{n!}$

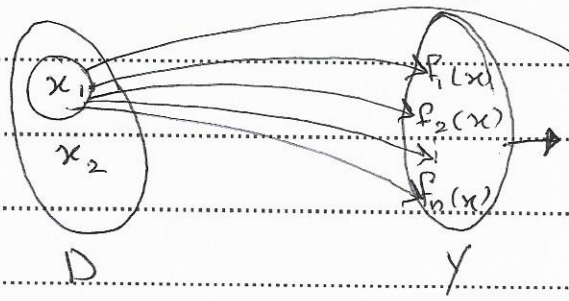
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{6^n} = \frac{6}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow$ متقاربة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مقدمة عن متتاليات الدوال:




تعريف متتالية الدوال المعرفة على مجموعة $\beta$ من $\mathbb{R}$ بالشكل $(f_n(x))$ نسميها متتالية الدوال فإذا كانت هذه المتتالية متقاربة وهي متقاربة من تابع $f(x)$ ونعني هذا التقارب بالتقارب النقطي

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon, x) ; n > N_{(\varepsilon,x)} \; ; \; x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

مثال:

لدينا المتتالية $f_n(x) = \frac{x}{x+1}$ نلاحظ أنها متتالية متقاربة من أجل أيّاً كانت $x$ $\Longleftarrow$ $f(x) = 0$

مثال:

$f_n(x) = x^n \; ; \; x \in ]0,1[$

تكون $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ إذا كان $x = 1$ التابع $f(x) = 1$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة