كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

5

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

من هنات هامة:

1 إذا كانت المتالية An ذات حدود موجبة ومتقاربة من عدد ليس الصفر فإن متالية الجذر النوني لـ An متقاربة ونهايتها تساوي الواحد

مثال: $U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$$

2 لو فرضنا المتالية U_n تحقق الشرط التالي $0 < \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < 1$ عندئذٍ المتالية U_n تكون متقاربة ولا متناهية في الصفر.

مثال احسب النهاية $O_n = \frac{n^{10}}{2^n}$

$$O_{n+1} = \frac{(n+1)^{10}}{2^{(n+1)}}$$

$$\frac{O_{n+1}}{O_n} = \frac{(n+1)^{10}}{2^{(n+1)}} \times \frac{2^n}{n^{10}} = \frac{(n+1)^{10}}{2.n^{10}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2^n} = 0$$

السلاسل العددية:

$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{n=5} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_5$$

بدراسة تقارب السلسلة العددية نوجد متتالية المجاميع الجزئية

وهي بالشكل:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n$$

إذا كانت المتتالية S_n متقاربة كانت السلسلة العددية متقاربة ونهايتها تساوي العدد a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$$

مثال: السلسلة الهندسية: هي متسلسلة هندسية أساسها k

ندرس تقارب السلسلة حسب قيم k

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n k^n$$

① إذا كانت $k=1$ فالسلسلة الهندسية تصبح بالشكل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_n = a + a + \dots + a = na$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow$$ السلسلة الهندسية متباعدة

② $|k| < 1$ عندئذٍ نحصل على السلسلة:

$$\sum ak + ak^2 + ak^3 + \dots = a(k + k^2 + k^3 + \dots)$$

$$S_n = k + k^2 + k^3 + \dots + k^n = k\,\frac{1-k^n}{1-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} k^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = k\,\frac{1}{1-k}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ إذا كانت السلسلة تبدأ من $n=0$ يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} a\frac{1-k^n}{1-k} = a\frac{1}{1-k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ak^n = \frac{a}{1-k}$$ متقاربة

* عندما $|k|>1$ تكون السلسلة متباعدة وعندما $k=-1$ أيضاً متباعدة.

مثال: ادرس تقارب السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \Rightarrow$$ السلسلة متقاربة

مثال: ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$$ السلسلة متباعدة

ملاحظة ①: شرط لازم وغير كافي لتكون السلسلة متقاربة هو أن a_n يسعى حدها العام إلى الصفر.

ملاحظة ②: إذا كانت نهاية الحد العام لا تساوي الصفر فالسلسلة متباعدة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لدينا السلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ هل هي سلسلة متقاربة أم متباعدة؟

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \infty - \infty$$

بعد إزالة حالة عدم التعيين:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$S_n = \sqrt{1} - 0 + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow$$ السلسلة متباعدة

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$ هل هي متقاربة أم متباعدة؟

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow$$ السلسلة متباعدة

خواص السلاسل العددية:

① بفرض لدينا سلسلتين عدديتين متقاربتين $(\sum a_n, \sum b_n)$ فإن مجموع السلسلة هو سلسلة جديدة متقاربة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

② إذا ضربنا السلسلة المتقاربة بعدد فالسلسلة الجديدة أيضاً متقاربة

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$$

③ الشرط اللازم والكافي لتكون السلسلة $\sum a_n$ متقاربة هو أن تكون المتتالية a_n هي متتالية لوشي

④ بفرض لدينا $a_n < b_n$ فإذا كانت $\sum b_n$ متقاربة تكون السلسلة الأصغر منها a_n متقاربة

وإذا كانت $\sum a_n$ متباعدة السلسلة الأكبر منها متباعدة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

⑤ إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ حيث $k \neq 0$ فإنّ السلسلتين في طبيعة واحدة متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً.

- إذا كان $k = 0$ فإنّ تقارب b_n يؤدي إلى تقارب a_n والعكس صحيح.
- إذا كان $k = \infty$ فإنّ تباعد b_n يؤدي إلى تباعد السلسلة a_n.

مثال: ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+c^2}$ بالمقارنة مع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+c^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+c^2} = 1$$

فالسلسلتان من طبيعة واحدة $\Leftarrow$ $\sum \frac{1}{n^2+c^2}$ متقاربة.

وبشكل خاص $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{n^2+2}{n^2+1}$

$$\ln \frac{n^2+2}{n^2+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$\sum \frac{1}{n^2+1}$ متقاربة $\Leftarrow$ $\sum \ln \frac{n^2+2}{n^2+1}$ متقاربة.

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$$

نقارن مع السلسلة المتباعدة $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

السلسلتان من طبيعة واحدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

سلسلة ريمان: $\sum \frac{1}{n^{\lambda}}$

① عندما $\lambda = 1$ تكون السلسلة توافقية متباعدة

② عندما $\lambda > 1$ تكون السلسلة متقاربة

③ عندما $\lambda < 1$ تكون السلسلة متباعدة

تمرين: $\sum \sin \frac{a}{n}$

مبرهنة هامة: إذا كانت السلسلة $\sum a_n$ ذات حدود موجبة وكانت $\lim_{n\to\infty} n^{\lambda} a_n$ حيث $\lambda > 1$ بوجودة و محدودة عندئذٍ تكون السلسلة متقاربة.

حل التمرين: $\sum \sin \frac{a}{n} \Rightarrow \lim \frac{\sin \frac{a}{n}}{a \frac{1}{n}} a = a$

$\Rightarrow$ السلسلة متباعدة

مثال: $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1$$

إذا كانت $\lambda = 1$ والنهاية موجودة و محدودة تكون السلسلة متباعدة.

مثال: $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

تمرين: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$S_n = \ln(2) - \ln(1) + \ln 3 - \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n+1)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ متباعدة $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \infty \Rightarrow$ السلسلة متباعدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$$

$$\lim \sqrt[n]{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \lim 3\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3 \neq 0$$

السلسلة متباعدة.

المقارب المطلق و المقارب الشرطي للسلاسل العددية الحقيقية:

برهنة: تكون السلسلة $\sum a_n$ متقاربة مطلقاً إذا كانت سلسلة القيم المطلقة متقاربة.

في بعض الحالات تكون سلسلة القيم المطلقة متباعدة والسلسلة الأساسية متقاربة عندئذٍ نقول إنّ السلسلة متقاربة بشرطٍ.

برهنة: كل سلسلة متقاربة بإطلاق تكون متقاربة أيضاً

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}$$

$$\left|\frac{\sin na}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

السلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة هذا يعني أن سلسلة القيم المطلقة متقاربة ومنه السلسلة الأولى متقاربة بالإطلاق.

كذلك الأمر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n^2}$

ملاحظة: بفرض $\sum a_n$ سلسلة أعداد حقيقية فإذا وجدت سلسلة $\sum b_n$ ذات حدود موجبة و عدد حقيقي موجب تماماً k بحيث $|a_n| \leq k b_n$ بدءاً من حد معين و كانت السلسلة $\sum b_n$ متقاربة فالسلسلة الأولى متقاربة بإطلاق فهي متقاربة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اختبارات التقارب:

① اختبار كوشي: يستخدم في السلاسل الحقيقية لاختبار الجذر النوني العام:

$$\sum a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$$

1- عندما $k<1$ تكون السلسلة متقاربة

2- عندما $k>1$ تكون السلسلة متباعدة

3- عندما $k=1$ تكون حالة شك (حالة ثانية)

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

متقاربة.

مثال:

$$\sum \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

متقاربة

② اختبار كوشي: اختبار دالامبير:

أيضاً يستخدم في السلسلة الحقيقية وهو:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$$

$k<1$ متقاربة

$k>1$ متباعدة

$k=1$ حالة شك

$|a_{n+1}| > |a_n|$ $\quad$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

a_n لا تسعى إلى الصفر فالسلسلة متباعدة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: ادرس تقارب السلسلة:

$$\sum \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \times \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3(n+1)}{n+1} \times \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow \text{متباعدة}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة