كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المتتالية: هي مجموعة لانهائية من الأعداد أو المناصر حدودها متتاليات وهي مجموعة لانهائية قابلة للعد. يمكن أن نبدأ بالعد من الصفر أو الواحد أو أي عدد آخر. مثلاً:

مجموعة منتهية لا تشكل متتالية $\{2, 4, 6, 8\}$

مجموعة لانهائية وقابلة للعد $\{\underset{①}{2}, \underset{②}{4}, \underset{③}{6}, \underset{④}{8}, \dots\}$ تشكل متتالية.

بشكل تدريجي: $U_{n+1} = U_n + 2$ ، $U_0 = 0$ أو بشكل صريح $U_n = U_0 + n \cdot 2$

يمكن تمثيل المتتالية بعدة طرق إما بطريقة المجموعة غير المنتهية كما في المثال أو باستخدام الحد العام وهو ما يرمز له بـ (U_n) أو (U_n) بدلالة n) أو إذا كان الحد المرمز له بدلالة n) ، ويمكن تمثيلها بطريقة تدريجية أي أن كل حد يكتب بدلالة ما قبله وهو ما يسمى بالتدريجية كالمثال سابقاً. إما $U_n = 2n$

أو $U_{n+1} = U_n + 2$

$U_0 = 0$

خواص المتتاليات:

1) قد تكون المتتالية محدودة من الأعلى والأدنى وقد تكون محدودة من جهة واحدة فقط.

إذا كانت محدودة من جهتين نقول أنها متقاربة $\lim_{n \to \infty} U_n = a$ حيث a عدد ثابت

- متباعدة تكون تباعدية $(+\infty)$ أو $(-\infty)$

وبالنسبة للمتتاليات ذات الصيغ بدلالة n تحسب تباعدها كالتقارب المعتادة، لكن إذا كانت المتتالية تدريجية أي بدلالة حدود أخرى نراعي الصيغة الآتية:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

أمثلة: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ / $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 5}{u_n + 3}$

تكون تباعدها حل المعادلة $x = f(x)$

نلاحظ في بعض المتتاليات المتقاربة والمتباعدة ليست لها نهاية محددة حتى لو كانت محدودة مثل $(u_n = \sin n)$

$u_3 = \frac{10}{1} = 10$ و $n \geq 3$; $u_n = \dfrac{3n+1}{n-2}$

إلى الأعلى إلى الأدنى $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 3$

المتتالية u_n محدودة ومتقاربة ومتناقصة $u_{n+1} < u_n$

محدودة لأنها محصورة بين عددين وهذه المتتالية غير منتهية.

(2.b) استنتاج اشتقاق $f(x)$: $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

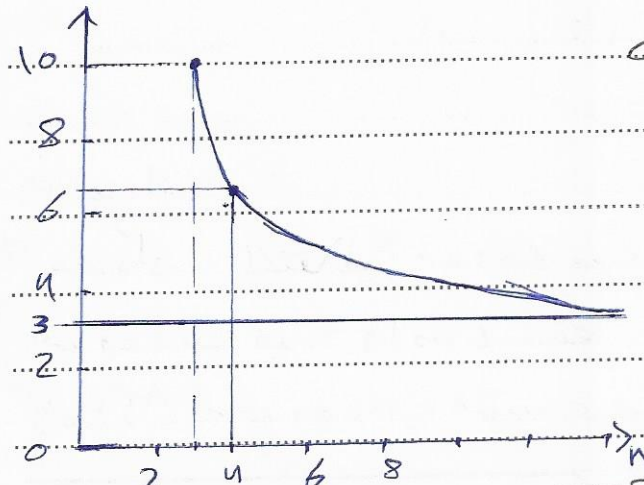
$D_f =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$

يمكن أن نكتب: $D_f =]3, \infty[$ أو $D_f =]2, \infty[$

$f'(x) = \dfrac{-7}{(x-1)^2} < 0$

u_n متناقصة لأن $f(x)$ متناقصة

تمثيل المتتالية في متعامد:



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهن بالبرهان المباشر: إذا كان $u_n = \frac{1}{n}$ ، $n \geq 1$ أثبت أن $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

الحل: حتى تكون متتالية (S) يجب أن يتحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon) ; n > N(\varepsilon) \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \longrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow N = \left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\} + 1$$

العدد الصحيح

برهن (2):

أثبت أن x_n متقاربة حيث (1) $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon) ; n > N(\varepsilon) \longrightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \longrightarrow \left|\frac{n^2-1-n^2-1}{n^2+1}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-2}{n^2+1}\right| < \varepsilon \longrightarrow \frac{2}{n^2+1} < \varepsilon \longrightarrow \frac{n^2+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\longrightarrow n^2+1 > \frac{2}{\varepsilon} \longrightarrow n^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \longrightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

حيث $2 > \varepsilon$ $\longleftarrow$ $N(\varepsilon) = \left\{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}\right\} + 1$

العدد الصحيح

ملاحظة: قد تكون المتتالية متزايدة لكن معينة (منتهية) ومتناقصة ابتداءً من حد معين أو بالعكس ومن ثم تتناقص لذلك نقول أن المتتالية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متتالية حسابية	متتالية هندسية
$u_n = a.n + b$	$u_n = u_0 . q^n$
$u_n = -2n - 5$	$u_n = u_1 . q^{n-1}$
$u_n = 3n + 2$	$u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ← محدودة متقاربة من 0
	$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ← متباعدة إلى ∞

أثبت أن: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ و $|q| < 1$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; ; \; n > N(\varepsilon) \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon$

$|q^n| < \varepsilon$ نأخذ ln الطرفين

$n \ln|q| < \ln\varepsilon$

نقسم على $\ln|q|$ لأن $|q| < 1$

$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

$N(\varepsilon) = \left\{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right\} + 1$

ملاحظة: عندما تكون $|q| < 1$ فإن $\ln|q| < 0$

فيصبح حل المثال السابق: $\ln\varepsilon < n \ln|q|$

$n < \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

وهذا مخالف للفرض لم نستطع

إيجاد $N(\varepsilon)$ ← المتتالية ليست متقاربة وهي متباعدة إلى ∞

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خصائص عوامل المتتاليات والتقاربية:

1) مجموع متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة.

2) إذا كانت المتتالية متقاربة من عدد فإن مقلوب المتتالية هو متتالية متقاربة أيضاً.

3) جداء متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة.

4) مبرهنة المقارنة أو الإطاحة معناها أنه إذا كان $z_n \leq x_n \leq y_n$ بحيث z_n و y_n متقاربتان من a $\Rightarrow$ x_n متقاربة من a

إذا كان $z_n \leq x_n \leq y_n$ و z_n و y_n متباعدتان إلى ∞ $\Rightarrow$ x_n متباعدة إلى ∞

ملاحظة: المتتاليات ذات المرجع n غالباً تتابع عددي يتصف بصفات المتتالية وفق البرهان المناسب:

مثال: $u_n = \sqrt[n]{n}$

أثبت أن $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

الحل:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$

$a_n = \sqrt[n]{n} - 1$

$\sqrt[n]{n} = a_n + 1$

نرفع الطرفين للقوة n:

$n = (a_n + 1)^n$

$n = 1 + n.a_n + \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2 + \dots$

$n > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$

$\Rightarrow 1 > \frac{n-1}{2} . a_n^2$

$\frac{2}{n-1} > a_n^2$

$0 < a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0 \Rightarrow$

$\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تذكرة: $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-1} b^2 + \dots$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ لأن $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

تمرين: $a > 1$; $x_{n+1} = \frac{1+a x_n}{a+x_n}$

$x_0 = 3$

المطلوب: أثبت أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأعلى بـ 3

ومن الأدنى بـ 1

علينا أن نبرهن: $1 \le x_n \le 3$

$x_{n+1} \le x_n$

① أثبت أن التابع المواقف هو متناقص متزايد:

$f(x) = \frac{1+ax}{a+x}$

$f'(x) = \frac{a^2 + ax - 1 - ax}{(a+x)^2} = \frac{a^2-1}{(a+x)^2} > 0$

f متزايداً تماماً

واضح أن $x_1 = \frac{1+a x_0}{a+x_0} = \frac{1+3a}{a+3}$

$x_1 = \frac{3(\frac{1}{3}+a)}{a+3} < 3 = x_0$

بما أن f متزايد فإن

$f(x_1) \le f(x_0)$

$x_{n+1} \le 3$

محققة ← المتتالية محدودة من الأعلى

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$

$x_{n+2} \leq x_{n+1}$

المتتالية متناقصة.

$\Rightarrow$ المتتالية متقاربة.

نحسب نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$

$$\frac{1+a_n}{a+x} = x$$

$$1 + ax = ax + x^2$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$\Rightarrow$ $1 \leq x_{n+1} \leq 3$

المتتالية محدودة من الأدنى

قاعدة: $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

المتتالية البرهنة، هي متتالية موجودة غير منتهية من عناصر متتالية ما، فمثلاً: x_{2n} هي متتالية جزئية من x_n

إذا كانت المتتالية الجزئية متقاربة فإن نهايتها تساوي نهاية جزئية للمتتالية الأولى x_n

متتالية كوشي: نقول أن x_n هي متتالية كوشي إذا تحقق: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; / \; n > N(\varepsilon)$ و $|x_n - x_m| < \varepsilon$

نعرف:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$|x_{2n} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

لا يحقق شرط كوشي إذن ليست متتالية كوشي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي.
- " " كوشي " " متقاربة.
- المتتاليات المتجاذبتان إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة وبداية الحد حينما صغرى يكون لها حاشر النهاية.
- لا متناهيات في الصغر أي نهايتها صفر
" " " الكبر " " $\pm\infty$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z