كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا ١

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

تعريف:

لتكن (U_n) متتالية كيفية من نقاط الفضاء المتري (E, d) يقال أن المتتالية U_n أساسية (أو متتالية كوشي) إذا وفقط إذا كانت من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً ε يوجد عدد طبيعي بحيث يكون $d(U_n, U_m) < \varepsilon$ وذلك أيّاً كان $n, m > n_0$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 ; d(U_n, U_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0$$

ملاحظات ونتائج:

1) لتكن U_n متتالية كيفية من نقاط الفضاء المتري عندئذٍ تكون المتتالية U_n أساسية إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_{n \to \infty} d(U_n, U_m) = 0$$

2) إنَّ أيّة متتالية متقاربة في أي فضاء متري هي متتالية أساسية.

3) إذا كان (X, d) فضاءً مترياً جزئياً من الفضاء المتري (E, d) وكانت (U_n) متتالية من نقاط الفضاء الجزئي (X, d) بحيث أنَّ U_n أساسية في (E, d) عندئذٍ تكون المتتالية (U_n) أساسية في (X, d)

والعكس صحيح إذا كانت (U_n) أساسية في الفضاء الجزئي فهي أساسية في الفضاء الكلي.

$\boxed{4}$ إن عكس الملاحظة $\boxed{2}$ غير صحيح بصورة عامة أي إنه ليس من الضروري أن تكون كل متتالية أساسية متقاربة.

ونأخذ مثال يوضح ذلك:

لنأخذ المتتالية $u_n = \frac{1}{n}$ فنجد أن $u_n \in]0,1]$ وذلك $\forall n \in \mathbb{N}$

هذه المتتالية متقاربة في $(\mathbb{R}, |.|)$ من الصفر فهي متتالية أساسية في $(\mathbb{R}, |.|)$ عندئذ حسب الملاحظة $\boxed{3}$ تكون (u_n) أساسية في الفضاء الجزئي $(]0,1[, |.|)$ ولكن (u_n) غير متقاربة في الفضاء $(]0,1[, |.|)$ لأنه:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0 \notin]0,1[$$

بينما لو أخذنا الفضاء الجزئي $([0,1], |.|)$ تكون المتتالية $u_n = \frac{1}{n}$ متقاربة وأساسية فيه.

$\boxed{5}$ إن أي متتالية أساسية تكون محدودة.

تعريف: لتكن (u_n) متتالية كيفية من نقاط الفضاء المتري (E,d) ولتكن (n_k) متتالية محدودة قيمها هي مجموعة جزئية من مجموعة قيم المتتالية (u_n) عندئذٍ ندعو (u_{n_k}) متتالية جزئية من (u_n)

نظرية: إذا كانت (u_n) متتالية أساسية من نقاط الفضاء المتري (E,d) وكانت (u_{n_k}) متتالية جزئية منها بحيث أن (u_{n_k}) متقاربة في (E,d) من النقطة (u_0) عندئذٍ تكون المتتالية (u_n) متقاربة من (u_0) أيضاً.

(U_n) متتالية أساسية
(U_{n_k}) متتالية جزئية متقاربة من (U_0) $\Leftarrow$ (U_n) متقاربة من (U_0)

تمهيد: إذا كانت (X_n) متتالية كيفية من نقاط الفضاء المتري الإقليدي (IR^n , d) فإن (X_n) تكتب على الشكل:

$(x_n) = (x_n^1 , x_n^2 , x_n^3 , \dots , x_n^n)$

حيث: (x_n^1) (x_n^2) (x_n^3) $, \dots ,$ (x_n^n) متتاليات من نقاط الفضاء المتري العادي $(IR , |\cdot|)$

نظرية ①: ~~إذا كانت~~ تكون المتتالية (X_n) أساسية في الفضاء المتري الإقليدي (IR^n , d) إذا وفقط إذا كانت المتتالية (x_n^i) متتالية أساسية في $(IR , |\cdot|)$ وذلك من أجل كل $i = \overline{1,n}$

نظرية ②: إذا كانت (X_n) متتالية كيفية من نقاط الفضاء المتري الإقليدي $(IR^n , |\cdot|)$ وكانت: $X_0 = (x_0^1 , x_0^2 , \dots , x_0^n)$ نقطة مفروضة عندئذٍ تتقارب المتتالية (X_n) في (IR^n , d) من X_0 إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية (x_n^i) في $(IR , |\cdot|)$ من (x_0^i) وذلك أياً كانت $i = \overline{1,n}$

تعريف: يقال عن الفضاء المتري (E , d) إنّه فضاء تام إذا وفقط إذا كانت كل متتالية أساسية هي من نقاطه متقاربة فيه إلى إحدى نقاطه.

في حال وجود متتالية أساسية واحدة على الأقل من نقاط (E,d) غير متقاربة من إحدى نقاطه، يقال أن الفضاء المتري (E,d) غير تام.

مثال: الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ فضاء تام وذلك لأنه:
لتكن U_n متتالية أساسية من نقاط الفضاء $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ولنثبت أنها متقاربة إلى إحدى نقاطه:

(U_n) أساسية في $\mathbb{R} \Rightarrow (U_n)$ محدودة في $\mathbb{R} \Rightarrow$
(حسب التحليل ①): تملك متتالية جزئية منها متقاربة من نقطة U_0
$\Rightarrow$ (حسب المبرهنة) U_n متقاربة من U_0
بمراعاة الاختيار الكيفي لـ U_n في الفضاء $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ نجد أن الفضاء $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ تام.

مثال:
الفضاء $(]0,1[, |\cdot|)$ غير تام لأن لدينا مثلاً المتتالية الأساسية $U_n = \frac{1}{n}$ في الفضاء $(]0,1[, |\cdot|)$ غير متقاربة من نقطة من نقاطه.

مثال:
ليكن لدينا الفضاءان المتريان $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ و $(]-3,15[, |\cdot|)$ ولتكن
$A = \{1, 3, 4\}$ $\quad B = [-1, 16[$

الحل: في الفضاء $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

A مجموعة منتهية $\Rightarrow A^\circ = \phi$

$\bar{A} = A$

(في أي فضاء متري غير متقطع سيكون $A^\circ = \phi$ ، $\bar{A} = A$ لأنها منتهية)

$\bar{B} = [-1, 16]$ $\qquad B^\circ =]-1, 16[$

في الفضاء $(]-3,15],|.|)$

A منتهية $\Leftarrow$ $A^{\circ}=\phi$ $\bar{A}=A$

$B^{\circ}=]-1,15[$

$\bar{B}_X=\bar{B}_{\mathbb{R}}\cap X$

$=[-1,16]\cap]-3,15]$

$\bar{B}_X=[-1,15]$

تمرين: اعط مثال يوضح بأنه ليست كل مجموعة مغلقة هي كرة مغلقة في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R},|.|)$ و في الفضاء المتري المتقطع $(\mathbb{R},d)$

$A=[-1,3]\cup[5,7]$

A مجموعة مغلقة لأنها اجتماع لمجالات مغلقة ولكن ليست كرة مغلقة في $(\mathbb{R},|.|)$ لأنها ليست مجاورة لكل نقطة من نقاطها كل مجال مغلق أو مجموعة منتهية هو كرة مغلقة.

في الفضاء المتري المتقطع $(\mathbb{R},d)$:

كل مجموعة في الفضاء المتري المتقطع هي مجموعة مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت.

$A=]3,4[$ أو $B=\{-4,-1,6,12\}$

بما أنه من المعلوم أنه أي مجموعة كيفية في الفضاء المتري المتقطع تكون مفتوحة ومغلقة بآنٍ معاً $\Leftarrow$

B , A مجموعات مغلقتان ولكن ليست كرات مغلقة

تمرين 1: نعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية التبولوجيا $\mathcal{T}$

بالشكل: $\mathcal{T}=\{T\in P(\mathbb{R})\ ;\ \mathbb{R}\setminus T$ منتهية $\}\cup\{\phi\}$

ولتكن: $A=\{3,4,12\}$

$B=]-3,1]$

$C=\mathbb{R}\setminus\{2,5\}$

والمطلوب أوجد:

$IsA\ ,\ A'\ ,\ bdA\ ,\ exA\ ,\ \bar{A}\ ,\ A^\circ$

$IsB\ ,\ B'\ ,\ bdB\ ,\ exB\ ,\ \bar{B}\ ,\ B^\circ$

$IsC\ ,\ C'\ ,\ bdC\ ,\ exC\ ,\ \bar{C}\ ,\ C^\circ$

الحل

$\mathcal{F}=\{F\in P(\mathbb{R})\ ;\ F$ منتهية $\}\cup\{\mathbb{R}\}$

$A^\circ=\phi$

$\bar{A}=A$

$exA=(\mathbb{R}\setminus A)^\circ=\mathbb{R}\setminus A$

$bdA=\bar{A}\setminus A^\circ=A$

$\bar{A}=A'\cup A\Rightarrow \bar{A}\setminus A\subseteq A'$

ندرس نقاط A:

$x=3$

$\exists\ v_3=\mathbb{R}\setminus\{4,12\}\ ;\ v_3\cap A=\{3\}\Rightarrow 3\notin A'$

$\Rightarrow 3\in IsA$

$x=4$

$\exists\ v_4=\mathbb{R}\setminus\{3,12\}\ ;\ v_4\cap A=\{4\}\Rightarrow 4\notin A'$

$\Rightarrow 4\in IsA$

$\cancel{A' = \bar{A} \setminus A}$

$A' = \bar{A} \setminus A = \phi$

$I_s A = A$

$B^\circ = \phi$

$\bar{B} = \mathbb{R} \Rightarrow bd B = \bar{B} \setminus B^\circ = \mathbb{R}$

$ex B = (\mathbb{R} \setminus B)^\circ = \phi$

$\bar{B} = B' \cup B \Rightarrow \bar{B} \setminus B \subseteq B'$

$\mathbb{R} \setminus B \subseteq B'$

نرى نقاط B :

$\forall x \in B \;\&\; \forall N(x, \rho) ; N(x, \rho) \cap B =$ عدد غير منتهٍ من عناصر B

$\Rightarrow x \in B'$

$\Rightarrow B' = \mathbb{R} \Rightarrow I_s B = \phi$

$C^\circ = C$

$\bar{C} = \mathbb{R}$

$ex C = \phi$

$bd C = \bar{C} \setminus C^\circ = \mathbb{R} \setminus C = \{2, 5\}$

$\bar{C} = C' \cup C \Rightarrow \mathbb{R} \setminus C \subseteq C'$

$\{2, 5\} \subseteq C'$

$\forall x \in C \;\&\; \forall G =]x - \rho, x + \rho[$.

$\Rightarrow G \cap C =$ عدد غير منتهٍ من عناصر C

$\Rightarrow x \in C'$

$C' = \mathbb{R}$

$C \subseteq C'$

$\Rightarrow I_s C = \phi$

انتهت المحاضرة