كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المتتاليات في الفضاء المتري:

تعريف: ليكن (E,d) فضاء متري ما نسمي التطبيق $U_n: \mathbb{N} \to E$ متتالية في الفضاء المتري (E,d) ونرمز لها بـ (U_n) أو $\{U_n\}$

مثال: $U_n = \frac{2n}{3n+1}$ متتالية في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |.|)$ الحقيقي المادي.

$U_n = \left(\frac{3n}{n+1}, \frac{2n+5}{n+3}\right)$ متتالية في الفضاء المتري $(\mathbb{R}^2, |.|)$

ملاحظة: يمكن أن يكون مجال المتتالية مجموعة جزئية غير منتهية من $\mathbb{N}$.

تعريف: ليكن (E,d) فضاء متري ما ولتكن (U_n) متتالية من نقاط هذا الفضاء ثم لنفرض أن ℓ نقطة ما في هذا الفضاء، عندئذ نقول أن المتتالية (U_n) متقاربة من النقطة ℓ في (E,d) إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \; \forall n > n_0 \Rightarrow d(U_n, \ell) < \varepsilon$$

ونكتب: $U_n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell$ أو $\lim_{n \to \infty} U_n = \ell$

ملاحظات:

① كلية خاصة: يوضع المجموعة $E = \mathbb{R}$، $d = |.|$ نحصل على الفضاء المادي $(\mathbb{R}, |.|)$ ويكون شرط التقارب

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \; \forall n > n_0 \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$$

وهو الشرط المستخدم التقارب المستخدم في التحليل الحقيقي.

② تكون المتتالية (u_n) متقاربة في الفضاء المتري (E,d) إذا وفقط إذا وجدت نقطة ℓ من (E,d) تحقق أن:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

③ تمهيد: لتكن (u_n) متتالية من نقاط الفضاء المتري (E,d) ولتكن ℓ نقطة من هذا الفضاء نلاحظ أن:

$$a_1 = d(u_1,\ell) \in \mathbb{R}^+$$
$$a_2 = d(u_2,\ell) \in \mathbb{R}^+$$
$$a_n = d(u_n,\ell) \in \mathbb{R}^+$$

بذلك تكون قد عرفنا متتالية حقيقية $\{a_n = d(u_n,\ell)\}$ ندعوها المتتالية العددية الموافقة للمتتالية (u_n).

لتكن u_n متتالية في الفضاء المتري (E,d) ولتكن ℓ نقطة من هذا الفضاء عندئذٍ تكون المتتالية (u_n) متقاربة من النقطة ℓ في (E,d) إذا وفقط إذا كانت المتتالية العددية الموافقة لها متقاربة من الصفر في $(\mathbb{R},|.|)$

الملاحظة: u_n متقاربة من $\ell \iff \{d(u_n,\ell)\}$ متقاربة من الصفر.

نظرية: إذا تقاربت المتتالية (u_n) في الفضاء المتري (E,d) تكون نهايتها وحيدة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان: نفرض أن (u_n) متقاربة في (E,d) من نقطتين ℓ و ℓ' عندئذٍ: (u_n) متقاربة من $\ell \Leftarrow \{d(u_n,\ell)\}$ متقاربة من الصفر.

(u_n) متقاربة من $\ell' \Leftarrow \{d(u_n,\ell')\}$ متقاربة من الصفر ولدينا ℓ, ℓ', u_n نقاط من الفضاء المتري (E,d) مهما كانت n يكون:

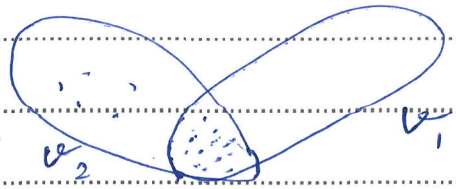
$$0 \leq d(\ell,\ell') \leq d(\ell,u_n) + d(u_n,\ell')$$

وبما أنّ: $d(\ell,u_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ، $d(\ell',u_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

فإنّ: $d(\ell,\ell') = 0$ مهما كانت n حيث $n \to +\infty$

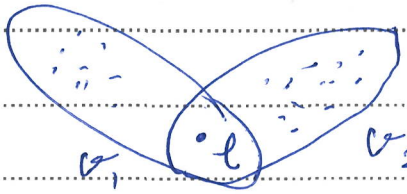
$\Leftarrow \ell = \ell'$ وبالتالي للمتتالية نهاية وحيدة.

نظرية: لتكن (u_n) متتالية من نقاط الفضاء المتري (E,d) ولتكن ℓ نقطة ما من E عندئذٍ تكون المتتالية (u_n) متقاربة من ℓ في (E,d) إذا وفقط إذا كانت أي جوارة للنقطة ℓ تحوي جميع حدود المتتالية (u_n) باستثناء عدد منتهي منها.



v_1 و v_2 جوارتا ℓ في (E,d)

وفي هذه الحالة (u_n) متقاربة من ℓ



في هذه الحالة (u_n) ليست متقاربة من ℓ حيث أن v_1, v_2 هما جوارتا ℓ

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتائج: لتكن (U_n) متتالية في (E,d) و ℓ نقطة من E عندئذٍ:

① تكون U_n متقاربة من ℓ في (E,d) إذا وفقط إذا كانت أي مجموعة مفتوحة تحوي ℓ وتحوي على جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منتهي منها.

② تكون U_n متقاربة في الفضاء (E,d) من ℓ إذا وفقط إذا كانت أي كرة مفتوحة مركزها ℓ تحوي جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منتهي منها.

تعريف: ليكن (E,d) فضاء متري ولتكن A مجموعة من نقاط هذا الفضاء أي $(A \subset E)$ عندئذٍ نقول أنّ المجموعة A محدودة في الفضاء المتري (E,d) إذا وفقط إذا وجدت كرة مغلقة $B(a,\rho)$ تحقق $A \subset B(a,\rho)$

نتيجة: كل كرة مغلقة في الفضاء المتري هي مجموعة محدودة.

مثال: المجموعة $]1,3[$ مجموعة محدودة في $(\mathbb{R},|\cdot|)$ لأنه توجد كرة مغلقة مثل $B(2,1) \subset [1,3]$ تحقق أن:

$$]1,3[\subset [1,3] = B(2,1)$$

$$]1,3[\subset B(2,1)$$

نتيجة: لتكن A مجموعة ما من نقاط الفضاء المتري (E,d) عندئذٍ تكون المجموعة A محدودة في (E,d) إذا وفقط إذا كانت $\delta(A) < +\infty$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان:

($\Leftarrow$) لنفرض أنّ A محدودة ولنبرهن أن $\delta(A)<\infty$

A محدودة $\Leftarrow$ حسب تعريف المجموعة المحدودة في (E,d) توجد كرة مغلقة $B(a,\rho)$ بحيث أن $A\subseteq B(a,\rho)$ واستناداً إلى النتيجة: "$A''\subseteq B \Rightarrow \delta(A)\leq\delta(B)$"

$$A\subseteq B(a,\rho) \Rightarrow \delta(A)<\delta(B) \Rightarrow \delta(A)\leq 2\rho<\infty$$
$$\Rightarrow \delta(A)<\infty$$

($\Rightarrow$) لنفرض $\delta(A)<\infty$ ولنبرهن أن A محدودة:

بما أن $\delta(A)<\infty$ يمكننا أن نضع $\delta(A)=\rho$ ولتكن a نقطة كيفية من A عندئذٍ $B(a,\rho)$ تحوي المجموعة A لأنه حسب تعريف قطر المجموعة:

$$\forall x\in A \Rightarrow d(a,x)\leq\delta(A)$$
$$d(a,x)\leq\rho \Rightarrow x\in B(a,\rho) \Rightarrow A\subseteq B(a,\rho)$$

$\Leftarrow$ A محدودة في (E,d)

تعريف: لتكن U_n متتالية ما في الفضاء المتري (E,d) نقول عن المتالية (U_n) إنها محدودة في (E,d) إذا وفقط إذا كانت مجموعة قيمها $\{U_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ مجموعة محدودة.

مثال: لنأخذ المتاليتان $U_n=\frac{n}{2n+1}$, $V_n=n^2$; $n\in\mathbb{N}^*$ في الفضاء المتري $(\mathbb{R},|.|)$

نلاحظ أنّ:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\{U_n ; n \in \mathbb{N}^*\} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\subseteq \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

إذا مجموعة قيم هذه المتتالية محدودة فتكون هذه المتتالية محدودة.

بالنسبة لـ V_n:

$\{V_n ; n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, 4, 9, \dots\}$

لكن لا يوجد أي مجال مغلق في $\mathbb{R}$ يحوي المجموعة $\{1, 4, 9\}$

بالتالي مجموع القيم غير محدودة ⇐

المتتالية غير محدودة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z