كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الفضاءات المترية الجزئية:

تعريف: إذا كان (E,d) فضاءاً متريّاً كيفياً و $X \neq \emptyset$ مجموعة كيفية من نقاط E عندئذٍ فإنّ تقصد تابع القيد على X يعرف تابع وحيد على X وبالتالي فإنّ (X,d) فضاء متري يدعى الفضاء هذا الفضاء بالفضاء المتري الجزئي من الفضاء (E,d)

ملاحظة: إن أي فضاء متري هو فضاء جزئي في نفسه

* إن $(\mathbb{N},|.|)$ هو فضاء جزئي من $(\mathbb{R},|.|)$ كذلك $(\mathbb{Z},|.|)$ و $([0,6],|.|)$

العلاقة بين بنية الفضاء المتري الجزئي والفضاء المتري الكلي:

ليكن (X,d) فضاءاً متريّاً جزئيّاً من الفضاء المتري (E,d) ولتكن a نقطة نفرضها من نقاط (X,d) وليكن $\rho > 0$ عدد حقيقي معطى ولنرمز بـ $N(a,\rho)$ للكرة المفتوحة في الفضاء الكلي (E,d) و $N^*(a,\rho)$ للكرة المفتوحة في الفضاء الجزئي (X,d) عندئذٍ تتحقق العلاقة:

$$N^*(a,\rho) = N(a,\rho) \cap X$$

وذلك لأنّ:

$$\forall x \in N^*(a,\rho) \iff x \in X \;\&\; d(x,a) < \rho$$
$$\iff x \in X \;\&\; x \in E \;\&\; d(x,a) < \rho$$
$$\iff x \in X \;\&\; x \in N(a,\rho)$$
$$\iff x \in X \cap N(a,\rho) \iff N^*(a,\rho) = X \cap N(a,\rho)$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

* نرمز لكرة مثابهة في علاقة مثابهة بالنسبة للكرة المثلمة

$$B^*(a,\rho) = X \cap B(a,\rho)$$

وأيضاً في حالة سطح الكرة:

$$S^*(a,\rho) = S(a,\rho) \cap X$$

العلاقات بين المجموعات المفتوحة بالفضاء الجزئي والكلي:

مبرهنة: ليكن (X,d) فضاءاً متريّاً جزئياً من الفضاء المتري (E,d) وليكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X,d) عندئذٍ يلزم ويكفي لأن تكون A مجموعة مفتوحة في (X,d) أن توجد مجموعة مفتوحة في الفضاء الكلي مثل G بحيث يكون $A = G \cap X$

البرهان:

لنفرض أن A مجموعة كيفية في (X,d) ولنبرهن وجود مجموعة مفتوحة في (E,d) مثل G بحيث يكون $A = G \cap X$

بما أن A مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (X,d) فحسب النتيجة (A) تكون A مجموعة مفتوحة في (E,d) إذا وفقط إذا كانت عبارة عن اجتماع كرات مفتوحة في (X,d) أي إذا كان:

$$A = \bigcup N^*(a,\rho) = \bigcup [N(a,\rho) \cap X]$$

أي أنّ $G = \bigcup N(a,\rho)$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الكلي (E,d) وبما يكون قد أثبتنا وجود مجموعة مفتوحة $G = \bigcup N(a,\rho)$ في (E,d) حيث $A = G \cap X$

← بما أن G مجموعة مفتوحة في (E,d) فحسب النتيجة نجد أن $G = \bigcup N(a,\rho)$ بالتعويض في العبارة التي تعطي A نجد أن

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$A = G \cap X$

$= \cup N(a,\rho) \cap X$

$= \cup (N(a,\rho) \cap X) = \cup N^*(a,\rho)$

أي أنّ A اجتماع لكرات مفتوحة في (X,d) فهي مجموعة مفتوحة فيه.

العلاقة بين مجاورات مجموعة أو نقطة في الفضاء المتري الكلي والجزئي:

نتج مباشرةً من العلاقة بين المجموعات المفتوحة

$V^* \in \bar{V}^*(A) \Rightarrow \exists V \in \bar{V}(A) ; V^* = V \cap X$

حيث $\bar{V}(A)$ أسرة مجاورات المجموعة A في الفضاء المتري الكلي (E,d)

$\bar{V}^*(A)$ أسرة مجاورات المجموعة A في الفضاء المتري الجزئي.

- حالة خاصة بالنسبة للمجموعات المفتوحة:

إذا كانت X مجموعة مفتوحة في (E,d) و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء المتري الجزئي (X,d) عندئذٍ تكون A مجموعة مفتوحة في (X,d) إذا وفقط إذا كانت مفتوحة في (E,d)

العلاقة بين المجموعات المغلقة:

برهنة: لتكن (X,d) فضاء متري جزئي من الفضاء المتري (E,d) ولتكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء (X,d) عندئذٍ تكون المجموعة A مغلقة في (X,d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في (E,d) مثل F بحيث يكون $A = F \cap X$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مسألة هامة:

إذا كانت X مجموعة مغلقة في (E,d) و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء المتري الجزئي (X,d) عندئذٍ تكون A مجموعة كيفية مغلقة في (X,d) إذا وفقط إذا كانت مغلقة في (E,d) وذلك لأن:

A مجموعة مغلقة في (X,d) $\Leftrightarrow$ يوجد مجموعة مغلقة F في (E,d) بحيث تكون $A=F\cap X$ $\Leftrightarrow$ A مجموعة مغلقة في (E,d) لأنها تقاطع مجموعتين مغلقتين.

تمرين: نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية IN التبولوجيا:

$$\tau=\{T\in P(W): \{3,4,5\}\subset T\}\cup\{\phi\}$$

① أوجد أسرة المجموعات المغلقة.

② لتكن $A=\{1,4,5,10\}$ أوجد A°, exA, bdA, $\bar{A}$, IsA, A'

③ اعطِ مثال على تبولوجيا أقوى من τ.

④ اعطِ مثال على تبولوجيا أضعف من τ.

⑤ هل الأسرة: $\beta=\{B\in P(W): \{1,3,4,5\}\subset B\}$ تشكل قاعدة لـ τ.

انتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z