كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا ١

المحاضرة : السابعة/نظري/

ملاحظة: من المعلوم هندسياً أن الشرط اللازم والكافي لتقاطع كرتين أن يكون البعد بين مركزيهما أصغر أو يساوي مجموع طولي نصفي قطريهما (على اعتبار التماس حالة خاصة من التقاطع).

* لكن هذا المعيار محقق في اتجاه واحد تبولوجياً وهو أنه إذا كانت الكرتان متقاطعتان فإن البعد بين مركزيهما أصغر أو يساوي مجموع طولي نصفي قطريهما ولكن العكس ليس صحيح بصورة عامة أي قد نجد كرتين تبولوجياً البعد بين مركزيهما أصغر أو يساوي مجموع نصفي قطريهما مع أن الكرتين غير متقاطعتين.

مثال: لنأخذ في الفضاء المتري المتقطع (E,d) نقطتين مختلفتين b, a

$$a \neq b \Rightarrow d(a,b) = 1$$

* في الكرة المفتوحة:

$$N(a,1) = \{a\} \qquad N\left(b,\tfrac{1}{3}\right) = \{b\}$$

$$\Rightarrow N(a,1) \cap N\left(b,\tfrac{1}{3}\right) = \phi$$

مع أنه:
$$d(a,b) = 1 < \frac{4}{3} = \rho_1 + \rho_2$$

* في الكرة المغلقة:

$$B\left(a,\tfrac{1}{2}\right) = \{a\} \qquad B\left(b,\tfrac{3}{4}\right) = \{b\}$$

$$\Rightarrow B\left(a,\tfrac{1}{2}\right) \cap B\left(b,\tfrac{3}{4}\right) = \phi$$

مع العلم أنه:
$$d(a,b) = 1 < \frac{5}{4} = \rho_1 + \rho_2$$

البرهان:

ليكن (E,d) فضاءاً مترياً كيفياً ولتكن x,y نقطتين كيفيتين من نقاطه، بما أن d تابع مسافة على E و $x \neq y$ فإن:

$$d(x,y) > 0$$

نأخذ: $\rho_1 = \frac{d(x,y)}{3}$, $\rho_2 = \frac{d(x,y)}{4}$

ثم نأخذ الكرتين المفتوحتين:

$N(y,\rho_2) = u$ $N(x,\rho_1) = v$

حيث: v مجاورة لـ x

u مجاورة لـ y

حيث $u \cap v = \phi$ لأن البعد بين مركزيهما أكبر من مجموع نصفي قطريهما

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{7d(x,y)}{12} < d(x,y)$$

تعريف:

لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (E,d)، ندعو المقدار

$$\sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$$

قطر المجموعة A ونرمز له بالرمز $\delta(A)$ أي

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$$

ملاحظات:

[1] أياً كانت المجموعة A وأياً كان الفضاء المتري (E,d) يكون $\delta(A) \geq 0$

[2] $\delta(A) = 0$ يتحقق عندما $A = \phi$ أو A مجموعة وحيدة العنصر

مثال:

$\Leftarrow A = [-2, 5[$

$S(A) = 7$ في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R}, |.|)$

$S(A) = 1$ في الفضاء المتري المتقطع $(\mathbb{R}, d)$

تعريف: لتكن A و B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء متري (E, d) نسمّي المقدار

$\inf\{d(a,b) ; a \in A , b \in B\}$

البعد بين المجموعتين A و B ونرمز له بالرمز:

$dist(A, B)$ أو $D(A, B)$

ملاحظات:

[1] أيّاً كان الفضاء المتري (E, d) وأيّاً كانت المجموعتان A , B كان $D(A, B) \geq 0$

[2] إذا كانت A و B مجموعتان من نقاط فضاء متري (E, d) بحيث $A \cap B \neq \phi$ فإنّ: $D(A,B) = 0$

[3] إذا كان $D(A, B) = 0$ فهذا $A \cap B \neq \phi$ ليس بالضرورة والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال: في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R}, |.|)$ المجموعتان:

$A = [0, 3[$ و $B =]3, 10[$ غير متقاطعتين مع العلم أنّ

$D(A, B) = 0$

[4] إذا كان $D(A, B) > 0 \Leftarrow A \cap B = \phi$

[5] لو كان $A = \{x\} \Leftarrow$

$D(A, B) = D(x, B) = \inf\{d(x, b) ; b \in B\}$

نظرية:
لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) و $x\in E$ نقطة ما عندئذٍ تكون x نقطة ملاصقة بالمجموعة A في (E,d) إذا وفقط إذا كان $D(x,A)=0$

نتيجة: تكون x نقطة غير ملاصقة بـ A في (E,d) إذا وفقط إذا $D(x,A)>0$

نتيجة: تكون A مجموعة مغلقة في (E,d) فإنّه من أجل كل $x\in E\setminus A$ يكون $D(x,A)>0$

تمرين: لدينا: $E=\{a,b,c,d\}$ ونعرف عليها التبولوجيا
$\mathcal{T}=\{E,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$
ولتكن: $A=\{a,b\}$, $B=\{d\}$, $C=\{c,d\}$

1. أوجد $\mathcal{F}$ أسرة المجموعات المغلقة
2. أوجد: $A^\circ, B^\circ, C^\circ, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, ex\,A, ex\,B, ex\,C,$ $A', B', C', IsA, IsB, IsC$
3. اعطِ مثال عن تبولوجيا أضعف من $\mathcal{T}$ غير الضعيفة
4. اعطِ مثال عن تبولوجيا أقوى من $\mathcal{T}$ غير القوية.
5. هل C كثيفة في B؟
6. هل A كثيفة في كل مكان.
7. هل الأسرة: $\mathcal{B}=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ تشكل قاعدة لـ $\mathcal{T}$؟

الحل

$\boxed{1}$ $f = \{\phi, E, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{c,d\}\}$

$\boxed{2}$ • $A^{\circ} = A$

• $B^{\circ} = \phi$

• $C^{\circ} = \{a\}$

• $\bar{A} = E$

• $\bar{B} = \{c,d\}$

• $\bar{C} = \{a,c,d\}$

• $ex A = (E \setminus A)^{\circ} = (\{c,d\})^{\circ} = \phi$

• $ex B = (E \setminus B)^{\circ} = (\{a,c,d\})^{\circ} = \{a,b\}$

• $ex C = (E \setminus C)^{\circ} = (\{b,c\})^{\circ} = \{b\}$

• A' :

$\bar{A} = A' \cup A$

$\bar{A} \setminus A \subseteq A'$

$\bar{A} \setminus A = E \setminus A = \{c,d\} \subseteq A'$

~~نلاحظ~~ نناقش عناصر A: $A=\{a,b\}$

من أجل a:

$V(a) = \{v \in p(E) ;\ \{a\} \subseteq v\}$

$\exists\ v = \{a\} \Rightarrow v \cap A = \{a\} \Rightarrow a \notin A'$

من أجل b:

$V(b) = \{v \in p(E) ;\ \{b\} \subseteq v\}$

$\exists\ v = \{b\} \Rightarrow v \cap A = \{b\} \Rightarrow b \notin A'$

$\Rightarrow A' = \{c,d\} \Rightarrow IS(A) = \{a,b\}$

- B'

$\overline{B} = B' \cup B$

$\overline{B} \setminus B \subseteq B'$

$\Rightarrow \{d, c\} \setminus \{d\} \subseteq B' \Rightarrow \{c\} \subseteq B'$

نناقش عناصر B:

$V(d) = \{V \in P(E)\ ;\ E \subseteq V\}$

$E \cap B = B = \{d\} \Rightarrow \{d\} \nsubseteq B' \Rightarrow \{d\} \subseteq Is(B)$

$\Rightarrow B' = \{c\} \Rightarrow Is\,B = \{d\}$

$\boxed{3}$ $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$

$\mathcal{T}_1 = \{E, \phi, \{a\}\}$

أو $\mathcal{T}_1 = \{E, \phi, \{b\}\}$

$\boxed{4}$ $\mathcal{T}_2 = \{E, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

$\boxed{5}$ $B \subseteq \overline{G} = \{a, c, d\}$

$\boxed{6}$ نعم كثيفة في كل مكان

$\boxed{7}$ ① $B \in \mathcal{T}$ محقق

② $\forall T \in \mathcal{T}\ ,\ T = \bigcup_{B_i \in \beta} B$

غير محقق لأنه من أجل $E \in \mathcal{T}$ لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصر من β.

انتهت المحاضرة