كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا ١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

2] لو كان $\rho = 0$ لوجدنا:

$N(a,\rho) = N(a,0) = \{x \in E ; d(x,a) < \rho 0\} = \phi$

$B(a,\rho) = B(a,0) = \{x \in E ; d(x,a) \leq 0\} = \{a\}$

$S(a,\rho) = S(a,0) = \{x \in E ; d(x,a) = 0\} = \{a\}$

3] تعيين شكل الكرات في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R}, |.|)$:

لتكن a نقطة مفروضة من نقاط الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$ و $\rho > 0$ عدد حقيقياً مفروضاً ★ عندئذٍ حسب تعريف الكرة المفتوحة:

$N(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R} ; d(x,a) < \rho\}$

$N(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R} ; |x-a| < \rho\} = \{x \in \mathbb{R} ; -\rho < x-a < \rho\}$

$= \{x \in \mathbb{R} ; a-\rho < x < a+\rho\}$

$\Rightarrow x \in]a-\rho , a+\rho[$

ونستنتج من ذلك أن الكرة المفتوحة ذات المركز a ونصف القطر ρ في الفضاء المتري الحقيقي العادي $(\mathbb{R}, |.|)$ هي المجال المفتوح ذو المركز a ونصف القطر ρ وبشكل معاكس: إن أي مجال مفتوح في $\mathbb{R}$ يمثل كرة مفتوحة مركزها مركز المجال ونصف قطرها نصف قطر المجال.

★ حسب تعريف الكرات المغلقة:

$B(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R} ; d(x,a) \leq \rho\} = \{x \in \mathbb{R} ; |x-a| \leq \rho\}$

$= \{x \in \mathbb{R} ; -\rho \leq x-a \leq \rho\} = \{x \in \mathbb{R} ; a-\rho \leq x \leq a+\rho\}$

$\Rightarrow x \in [a-\rho , a+\rho]$

نستنتج من ذلك أن الكرة المغلقة في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R},|.|)$ هي مجال مغلق الموافق لها (نفس المركز ونفس نصف القطر).

وبشكل معاكس كل مجال مغلق في $\mathbb{R}$ يمثل كرة مغلقة توافق هذا المجال أي لها نفس المركز ونصف القطر.

* حسب تعريف سطح الكرة:

$$S(a,\rho)=\{x\in\mathbb{R};\ d(a,\rho)=\rho\}=\{x\in\mathbb{R};\ |x-a|=\rho\}$$

$$\Rightarrow x=\{a-\rho,\ a+\rho\}$$

أي أن سطح الكرة في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R},|.|)$ هو عبارة عن مجموعة مؤلفة من نقطتين فقط.

(4) نستنتج أن المفهوم الهندسي للكرة يختلف عن المفهوم التبولوجي لها أي أن سطح الكرة حسب الفضاء المتري العادي هو مجموعة مؤلفة من نقطتين بينما سطح الكرة هندسياً ليس كذلك ويتطابق المفهومان الهندسي والتبولوجي في الفضاء المتري الإقليدي ثلاثي الأبعاد.

(5) تمرين: شكل الكرات في الفضاء المتري المتقطع:

ليكن (E,d) فضاء متري متقطع و a نقطة من نقاطه، وليكن $\rho>0$ عدد حقيقي معطى.

أوجد شكل الكرات المفتوحة:

$$N(a,\rho)=\{x\in E;\ d(x,a)<\rho\}$$

علماً أن تابع المسافة المعرف على الفضاء المتري المتقطع هو:

$$d(x,a)=\begin{cases}0 & ;\ x=a\\ 1 & ;\ x\neq a\end{cases}$$

نناقش حسب قيم ρ:

$\rho = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 & \text{إما} \quad \text{غير محققة} \\ x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 & \text{أو} \quad \text{غير محققة} \end{cases}$

ومنه في حالة $\rho = 0$ فإن الكرة المفتوحة هي الخالية

$0 < \rho \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 < \rho & \text{محققة} \\ x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 & \text{غير محققة} \end{cases}$

في حالة $0 < \rho \leq 1$ فإن الكرة المفتوحة هي:

$N(a,\rho) = \{a\}$

$\rho > 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 < \rho & \text{محققة} \\ x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 < \rho & \text{محققة} \end{cases}$

في حالة $\rho > 1$ عندئذٍ $N(a,\rho) = E$

$$N(a,\rho) = \begin{cases} \phi & ; \rho = 0 \\ \{a\} & ; 0 < \rho \leq 1 \\ E & ; \rho > 1 \end{cases}$$

- إيجاد شكل الكرات المغلقة:

$B(a,\rho) = \{x \in E ; d(x,a) \leq \rho\}$

~~$0 \leq \rho <$~~

$0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 & \text{محققة} \\ x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 & \text{غير محققة} \end{cases}$

في حالة $0 \leq \rho < 1$ فإن: $B(a,\rho) = \{a\}$

$$\rho \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 & \text{محققة} \\ x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 & \text{محققة} \end{cases}$$

من أجل $\rho \geq 1$ نجد أن: $B(a,\rho) = E$

$$B(a,\rho) = \begin{cases} \{a\} \; ; & 0 \leq \rho < 1 \\ E \; ; & \rho \geq 1 \end{cases}$$

إيجاد سطح الكرة:

$$S(a,\rho) = \{x \in E ; \; d(x,a) = \rho\}$$

$$\rho = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 & \text{محققة} \\ x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 & \text{غير محققة} \end{cases}$$

من أجل $\rho = 0$ نجد: $S(a,\rho) = \{a\}$

$$(0 < \rho < 1) \wedge (\rho > 1) \Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 & \text{غير محققة} \\ x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 & \text{غير محققة} \end{cases}$$

من أجل: $(\rho > 1) \wedge (0 < \rho < 1)$ نجد أن $S(a,\rho) = \phi$

$$\rho = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \; ; \; d(x,a) = 0 & \text{غير محققة} \\ x \neq a \; ; \; d(x,a) = 1 & \text{محققة} \end{cases}$$

من أجل $\rho = 1$ نجد أن $S(a,\rho) = E \setminus \{a\}$

$$\& S(a,\rho) = \begin{cases} \phi & ; \quad \rho \neq \{0,1\} \\ \{a\} & ; \quad \rho = 0 \\ E\setminus\{a\} & ; \quad \rho = 1 \end{cases}$$

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) ولتكن $x \in A$ نقطة مفروضة يقال عن x أنها نقطة داخلية للمجموعة A في الفضاء المتري (E,d) إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة $N(x,\rho)$ حيث تحقق: $N(x,\rho) \subseteq A$

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) يقال عن المجموعة A إنها مفتوحة في الفضاء المتري (E,d) إذا وفقط إذا كان $A^{\circ} = A$

نظرية: في الفضاء المتري (E,d) أي كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة

البرهان: ليكن (E,d) فضاء متري كيفي و $N(a,\rho)$ كرة مفتوحة كيفية في (E,d) ولنبرهن أن $N(a,\rho)$ مجموعة مفتوحة.

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أنّ:

$$N(a,\rho) = [N(a,\rho)]^{\circ}$$

لدينا الاحتواء: $[N(a,\rho)]^{\circ} \subseteq N(a,\rho)$ محقق دوماً.

من جهة ثانية لتكن: $y \in N(a,\rho) \Leftarrow$ حسب تعريف الكرة المفتوحة $d(y,a) < \rho$ بالتالي $\rho_0 = \rho - d(y,a)$

$\Leftarrow \rho_0 > 0$ ~~$d(x,y) < \rho_0$~~

ولنأخذ الكرة المفتوحة $N(y,\rho_0)$ أياً كانت $t\in N(y,\rho)$

$\Leftarrow$ $d(t,y)<\rho_0$

إذا a، t، y ثلاث نقط من الفضاء المتري (E,d) فهي تحقق متراجحة المثلث:

$d(t,a) < d(t,y) + d(y,a)$

$d(t,a) < \rho_0 + d(y,a)$

$d(t,a) < \rho - d(y,a) + d(y,a)$

$d(t,a) < \rho$

$\Leftarrow$ $t\in N(a,\rho)$ وبما أن t نقطة كيفية من $N(y,\rho_0)$

نجد أن: $N(y,\rho_0)\subseteq N(a,\rho)$ وهذا يعني حسب تعريف الداخلية أن: $y\in[N(a,\rho)]^\circ$ وبراعاة الاختيار الكيفي لـ $y\in N(a,\rho)$ نجد أن: $N(a,\rho)\subseteq[N(a,\rho)]^\circ$

عندئذٍ نجد أن الاحتواءين يحققان المطلوب.

ملاحظة: إن عكس البرهنة السابقة غير صحيح بصورة عامة، بمعنى ليس بالضرورة أن تكون كل مجموعة مفتوحة هي كرة مفتوحة.

مثال: لنأخذ الفضاء المتري (E,d) المتقطع والمجموعة $E=\mathbb{Z}$ و

$A=\{-9,1,7\}=\{-9\}\cup\{1\}\cup\{7\}$

$=N(-9,\frac{1}{2})\cup N(1,\frac{1}{4})\cup N(7,\frac{1}{3})$

عبارة عن اجتماع مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي بالتالي اجتماع المجموعة في الفضاء المتري هو مجموعة مفتوحة لذلك A مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{Z},d)$ المتقطع ولكن

تشكل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المتقطع $(\mathbb{Z}, d)$ هو:

$$N(a,\rho) = \begin{cases} \phi \ ; \ \rho = 0 \\ \{a\} \ ; \ 0 < \rho \le 1 \\ \mathbb{Z} \ ; \ \rho > 1 \end{cases}$$

فإنّ A ليست كرة مفتوحة في $(\mathbb{Z}, d)$.

- $\mathbb{Z}, \phi$ و مجموعة وحيدة العنصر هم أمثلة لمجموعات مفتوحة وكرات مفتوحة بنفس الوقت.

A: مثال لمجموعة مفتوحة وليست كرة مفتوحة

مثال: في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R}, d)$ لدينا:

$A =]-3, 10[\cup]22, 100[$

لدينا في الفضاء المتري الحقيقي العادي المجال المفتوح هو كرة مفتوحة وكل كرة مفتوحة في الفضاء المتري هي مجموعة مفتوحة

$\Leftarrow A$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع لمجموعتين مفتوحتين

ولكن A ليست كرة مفتوحة لأنها لا تشكل مجال مفتوح.

نتيجة: إذا كانت A مجموعة مفتوحة كيفية من الفضاء المتري (E, d) عندئذٍ يلزم ويكفي لأن تكون A مجموعة مفتوحة في الفضاء (E, d) هو أن تكتب على شكل اجتماع لكرات مفتوحة في (E, d)

ملاحظة: إنّ أي جوار لنقطة هو مجاور لها لأن جوار النقطة هو كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة ثم إنّ أي كرة مفتوحة هي

هي مجموعة مفتوحة ، وبالتالي فهي مجاورة لكل نقطة من نقاطها .

أما العكس فهو غير صحيح بالضرورة .

مثال: في الفضاء المتري المتقطع $(\mathbb{R}, d)$ نجد أن:

$$A = \{3, 14\} = N\left(3, \tfrac{1}{2}\right) \cup N\left(14, \tfrac{1}{2}\right)$$

إذاً A مجموعة مفتوحة لأنها تكتب على شكل اجتماع لكرات مفتوحة فهي مجاورة لكل نقطة من نقاطها أي $A \in \mathcal{N}(3)$ ؛ ولكن أي جوار لـ 3 هو كرة مفتوحة مركزها 3 :

$$N(3, \rho) = \begin{cases} \phi & ; \ \rho = 0 \\ 3 & ; \ 0 < \rho \leq 1 \\ \mathbb{R} & ; \ \rho > 1 \end{cases}$$

ونلاحظ أن $A \neq N(3, \rho)$ أي أن A ليست جوار لـ 3 في الفضاء المتري المتقطع $(\mathbb{R}, d)$

مبرهنة: إنّ أية كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة في أي فضاء متري (E, d)

ملاحظة: إنّ عكس النظرية ليس صحيح بصورة عامة

مثال: لنأخذ في الفضاء المتري المتقطع $(\mathbb{R}, d)$ المجموعتين $\mathbb{R}$ و

$$A = \{12, 26\} = \{12\} \cup \{26\} = B\left(12, \tfrac{1}{4}\right) \cup B\left(26, \tfrac{1}{2}\right)$$

شكل الكرات ~~المفتوحة~~ المغلقة في الفضاء المتري المتقطع:

$$B(a,\rho) = \begin{cases} \{a\} & ; \ 0 < \rho < 1 \\ \mathbb{R} & ; \ \rho \geq 1 \end{cases}$$

لتكن A مجموعة مغلقة لأنها تكتب على شكل اجتماع لكرات مغلقة وليست كرة مغلقة لأنها لا تأخذ أحد أشكال الكرات المغلقة في الفضاء المتري المتقطع $(\mathbb{R}, d)$.

$\mathbb{R}$ كرة مغلقة في الفضاء المتري المتقطع فهي مجموعة مغلقة

انتهت المحاضرة