كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الفضاءات المترية:

ملاحظة: إنّ جميع المفاهيم و الخواص التي درسناها في حالة الفضاء التوبولوجي تتحقق في الفضاء المتري الذي هو حالة خاصة من الفضاءات التوبولوجية، لكن ثمة مفاهيم و خواص إضافية تتحقق في الفضاء المتري و لا تتحقق في الفضاء التوبولوجي.

تعريف:

لتكن $E \neq \phi$ مجموعة أيفية من العناصر و ليكن $f: E \times E \to \mathbb{R}^+$ تابعاً يحقق الشروط التالية:

① $x = y \Rightarrow f(x,y) = 0$

② من أجل كل x و y من E لدينا $f(x,y) = f(y,x)$

③ من أجل كل x, y, z من E لدينا: $f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y)$ (متراجحة المثلث) عندئذٍ نسمّي التابع f تابع المسافة على E و يرمز له بالرمز d

$f = d$

* تسمّى الثنائية (E,d) فضاءاً متريّاً.
* تسمّى عناصر المجموعة E نقاط الفضاء المتري (E,d)
- لماذا سمّي $f = d$ تابع مسافة؟

الإجابة تكمن في الأسباب الآتية:

1) من المعلوم في الهندسة لدينا أنّه أيّاً كانت النقطتان A و B فإنّ المسافة أو البعد بينهما يقاس بعدد حقيقي موجب و هذا

يتوافق مع كون مجموعة قيم تابع المسافة هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^+$

[2] وفي الهندسة نعلم أيضاً أن الشرط اللازم والكافي لتطابق موضعين أو نقطتين A و B على بعدهما هو أن تكون المسافة بينهما معدومة.

وهذا يتطابق مع الشرط ① في تعريف تابع المسافة

[3] كذلك في الهندسة المسافة من الموضع A إلى الموضع B هي نفسها المسافة من الموضع B إلى الموضع A

وهذا يتطابق مع الشرط ② في تعريف تابع المسافة

[4] نعلم أيضاً أنه أيا كانت النقاط A و B و C فإنها إما أن تكون واقعة على استقامة واحدة أو أنها تشكل مستوى وار بالمثلث ABC

* إذا كانت A, B, C على استقامة واحدة فهنا نميز حالتين:

أولاً: C تقع بين A و B هنا تتحقق حالة المساواة « البعد بين A إلى B يساوي مجموع البعدين من A إلى C + البعد بين C إلى B »

ثانياً: C خارج النقطة AB هنا تتحقق المتراجحة « البعد من B إلى C + البعد من A إلى C > البعد من A إلى B »

* إذا كانت A و B و C تشكل مثلث « الأبعاد بين النقط A, B, C شبه تشكل أطوال أضلاع المثلث * ومن المعلوم في الهندسة أن طول أي ضلع في مثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الباقيين »

وهنا تتحقق المتراجحة

وهي تتوافق مع الشرط ③ في تعريف تابع المسافة

أمثلة: [1] لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ولنعرف التابع:

$d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ولنعرف d بالشكل الآتي: $d(x,y) = |x-y|$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

أثبت أن التابع d يعرف تابع مسافة على $\mathbb{R}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

① $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

الشرط الأول محقق.

② $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$

الشرط الثاني محقق.

③ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$d(x,y) = |x-y|$ (نضيف ونطرح z)

$= |x - z + z - y| \leq |x-z| + |z-y|$

$= d(x,z) + d(z,y)$

الشرط الثالث محقق.

$\Leftarrow$ التابع d هو تابع مسافة على $\mathbb{R}$، يدعى تابع القيمة المطلقة أو تابع المسافة العادية على R والفضاء المتري الناتج $(\mathbb{R}, d)$ و $(\mathbb{R}, |.|)$ يدعى الفضاء المتري الحقيقي العادي.

ملاحظة: متراجحة كوشي:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

ملاحظة:

$\star$ $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ مرة}} = \mathbb{R}^n$

$\star \Rightarrow x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (فوق كل منها $\mathbb{R}$)

$\star$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = y \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i = \overline{1, n}$

أي من كل الأعداد من 1 إلى n

مثال 2: نعرف التابع $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ بالشكل الآتي:

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

أثبت أن d يعرف تابع مسافة مع $\mathbb{R}^n$.

الحل: نتحقق من شروط تابع المسافة:

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

① $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0 \Leftrightarrow (x_i-y_i)^2=0$

$\Leftrightarrow x_i-y_i=0 \Leftrightarrow x_i=y_i \quad \forall i=\overline{1,n} \Leftrightarrow x=y$

الشرط الأول تحقق.

② $d(x,y)=d(y,x)$

$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=d(y,x)$

الشرط الثاني تحقق.

③ $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

نضع $x_i-z_i=a_i$

$z_i-y_i=b_i$

$\Rightarrow x_i-y_i=a_i+b_i$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+2a_ib_i+b_i^2)}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i}\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}=d(x,z)+d(z,y)$$

الشرط الثالث تحقق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

⇐ بشكل d تابع مسافة على $\mathbb{R}^n$ يطلق عليه اسم تابع المسافة الإقليدية و الفضاء المتري الناتج $(\mathbb{R}^n, d)$ يسمى الفضاء المتري الإقليدي ذو البعد

حالات خاصة: ① إذا كان $n=1$ نحصل على $E = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$$

② $n=2$ نحصل على المستوي الإقليدي المعروف.

③ $n=3$ نحصل على الفراغ الإقليدي المعروف.

مثال 3- لتكن $E \neq \emptyset$ مجموعة كيفية من العناصر ولتكن $d: E \times E \to \mathbb{R}^2$ تابعاً معرفاً بالشكل التالي:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$$

لنبين أن d تابع مسافة على E

الحل:

$\forall x, y, z \in E$

① $d(x,y) = 0 \iff x = y$

الشرط الأول تحقق حسب تعريف تابع d.

② $d(x,y) \stackrel{?}{=} d(y,x)$

* حالة (1) $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$

$y = x \Rightarrow d(y,x) = 0$

$\Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

* حالة (2) $x \neq y \Rightarrow d(x,y) = 1$

$y \neq x \Rightarrow d(y,x) = 1$

في الحالتين الشرط الثاني تحقق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحالة ①: إذا كانت $x = y$ $\Leftrightarrow$ $d(x,y) = 0$ ③

والمتراجحة: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

محققة لأنّ $d(z,y) = 0$ $0 \leq d(x,z) + d(z,y)$

$d(x,z) = 0$

الحالة ②: $1 \leq d(x,z) + d(z,y)$

المتراجحة غير محققة في حالة: $d(x,z) = 0$ و $d(z,y) = 0$

ولكن إذا كان: $d(x,z) = 0 \Leftarrow x = z$

و: $d(z,y) = 0 \Leftarrow z = y$

$\Rightarrow x = y$

وهنا تناقض الفرض $x \neq y$

أي المتراجحة محققة في الحالة الثانية.

في الحالتين الشرط الثالث محقق إذاً $\Leftarrow$

d تابع مسافة على E يسمّى هذا التابع تابع المسافة المختزلة

ويسمّى الفضاء المتري الناتج (E,d) بالفضاء المتري المنقطع

الكرات:

تعاريف: ليكن (E,d) فضاءً متريّاً كيفيّاً، و a نقطة مفروضة من E و $\rho > 0$ عدداً حقيقياً مفروضاً.

① تسمى مجموعة النقاط $\{x \in E ; d(x,a) < \rho\}$ كرة مفتوحة في الفضاء المتري (E,d) مركزها النقطة a ونصف قطرها ρ

ويرمز لها بأحد الرمزين:

$N(a,\rho)$ أو $N_\rho(a)$

ونكتب: $d(a,\rho) = \{x \in E ; d(x,a) < \rho\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② تسمى مجموعة النقاط $\{x \in E ; d(x,a) \leq \rho\}$ كرة مغلقة في (E,d) مركزها a ونصف قطرها ρ ويرمز لها بالرمز $B(a,\rho)$ أو $B_\rho(a)$ ونكتب:

$$B(a,\rho) = \{x \in E ; d(x,a) < \rho\}$$

③ أما مجموعة النقط: $\{x \in E ; d(x,a) = \rho\}$ سطح الكرة في (E,d) ذات المركز a ونصف القطر ρ ويرمز لها $S(a,\rho)$ أو $S_\rho(a)$

④ ندعو جواراً للنقطة في الفضاء المتري (E,τ) كل كرة مفتوحة مركزها في هذه النقطة.

* ندعو جواراً مغلقاً للنقطة في (E,d) كل كرة مغلقة مركزها في هذه النقطة.

ولإثبات: حيث تعريف الكرة المغلقة نجد أن:

$$B(a,\rho) = \{x \in E ; d(x,a) \leq \rho\}$$

$$= \{x \in E ; d(x,a) < \rho\} \cup \{x \in E ;$$

$$= N(a,\rho) \cup S(a,\rho)$$

أي أن الكرة المغلقة تساوي اتحاد الكرة المفتوحة مع سطح الكرة الموافق أي لهما نفس المركز ونصف القطر

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة