كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,t)
ولتكن x نقطة مفروضة.

1) يقال عن x إنها نقطة حدية (أو نقطة حدية) للمجموعة A في الفضاء (E,t) إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall v \in V(x) \quad v \cap A \neq \phi$$
$$v \cap E \setminus A \neq \phi$$

تسمى مجموعة جميع النقاط الحدية لـ A في (E,t) حدية المجموعة A في (E,T) ويرمز لها بالرمز FrA أو bdA

2) يقال عن x إنها نقطة منعزلة للمجموعة A إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\exists v \in V(x) \; ; \; v \cap A = \{x\}$$

تسمى مجموعة جميع النقاط المنعزلة لـ A في (E,T) منعزلة المجموعة A ويرمز لها بالرمز IsA

ملاحظات ونتائج:

① من تعريف النقطة الحدية لمجموعة والنقطة اللاصقة نجد أن كل نقطة حدية لـ A هي نقطة لاصقة لـ A، أي أن:

$$bdA \subset \bar{A} \cap \overline{E \setminus A} \quad -(1)$$

وبالعكس إذا كانت $x \in \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$ هذا يعني:

$$x \in \overline{E \setminus A} \Leftarrow v \cap E \setminus A \neq \phi \; ; \; \forall v \in V(x)$$
$$x \in \bar{A} \Leftarrow \forall v \in V(x) \; ; \; v \cap A \neq \phi$$

ب- تعريف النقطة الحدية لمجموعة نجد أن: $x \in bdA$ لذلك:

$$\bar{A} \cap F\backslash A \subseteq bdA \quad (2)$$

من علاقة الاحتواء (1) و (2) نجد أن: $bdA = \bar{A} \cap F\backslash A$

② أيا كانت المجموعة A في الفضاء التبولوجي (E,T) وجدنا أن $bdA = \bar{A} \cap F\backslash A$ لذلك فإنّ حدية أي مجموعة هي مجموعة مغلقة لأنها تقاطع لمجموعتين أي مجموعتين مغلقتين.

③ من تعريف النقطة المنعزلة لمجموعة نجد أنه أياً كانت $x \in IsA$ فإنّه توجد $V(x) \ni V_0$ بحيث يكون: $V_0 \cap A = \{x\}$

وبما أنّ: $x \in A \iff \{x\} \subset A \iff V_0 \cap A \subset A$

لذلك فإنّ $IsA \subset A$

④ من تعريف نقطة التراكم والنقطة المنعزلة لمجموعة نجد أن كل نقطة تراكم ليست نقطة صد منعزلة والعكس أي:

$$A' \cap IsA = \emptyset$$

مثال: برهن على مجموعة الأعداد الطبيعية التبولوجيا:

$$T = \{T \in P(\mathbb{N}) : \{5,10,15\} \subset T\} \cup \{\emptyset\}$$

ولتكن: $A = \{1,4,5,10,12,15,17\}$

1- أوجد أسرة المجموعات المغلقة في $(\mathbb{N},T)$

2- أوجد: $\bar{A}$ ، A° ، $V(3)$ ، $V(A)$ ، bdA ، exA ، A' ، IsA

3- اعط مثال على تبولوجيا أقوى من التبولوجيا T

4- اعط مثال لتبولوجيا أضعف من التبولوجيا T

الحل:

① $f = \{F \in P(\mathbb{N}) : \{5,10,15\} \not\subset F\} \cup \{\mathbb{N}\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* $V(A)=\{v\in P(\mathbb{N});\ A\subseteq v\}$ (2)

* $V(3)=\{v\in P(\mathbb{N});\ \{3,5,10,15\}\subseteq v\}$

* $A^\circ=A$

* $\bar{A}=\mathbb{N}$

* A': $bdA=\bar{A}\setminus A^\circ=\mathbb{N}\setminus A$: إذاً

$$ExA=(\overline{\mathbb{N}\setminus A})=\mathbb{N}\setminus A$$

$$\Rightarrow bdA=\bar{A}\cap ExA=\mathbb{N}\cap(\mathbb{N}\setminus A)=\mathbb{N}\setminus A$$

* $exA=(\mathbb{N}\setminus A)^\circ=\phi$

* $\bar{A}=A'\cup A$: إذاً A'

$\mathbb{N}=A'\cup A \Rightarrow \mathbb{N}\setminus A\subseteq A'$

ندرس تماس A' :

* $x=1,\ V(1)=\{v\in P(\mathbb{N});\ \{1,5,10,15\}\subseteq V\}$ ~~$\cap A\neq\phi,\{1\}$~~

$\forall v\in V(1)\Rightarrow\{1,5,10,15\}\subseteq V\cap A\neq\phi,\{1\}$

* $x=4,\ V(4)=\{v\in P(\mathbb{N});\ \{4,5,10,15\}\subseteq V\}$

$\forall v\in V(4)\Rightarrow\{4,5,10,15\}\subseteq V\cap A\neq\phi,\{4\}$

* $\forall x\in A\Rightarrow V(x)=\{x\in P(\mathbb{N});\ \{x,5,10,15\}\subseteq v\}$

$\forall x\in V(x)\Rightarrow\{x,5,10,15\}\subseteq V\cap A\neq\phi,\{x\}$

بالتالي: $x\notin ISA$ & $x\in A'$

ومنه: $A'=\mathbb{N}$; $ISA=\phi$

$T_1=\{T\in P(\mathbb{N});\ \{5,10,15\},7\}\subseteq T\}\cup\{\phi\}$ (3)

$\{5,10,15\}\subseteq\{5,10,15,7\}$

$\forall T_1\in T_1\Rightarrow\{5,10,15,7\}\subseteq T_1$

$\Rightarrow\{5,10,15\}\subseteq T\Rightarrow T\in T$

$\tau_2 = \{T \in P(\mathbb{N}) ; \{5\} \subset T\} \cup \{\emptyset\}$

$\forall T \in \tau \Rightarrow \{5, 10, 15\} \subset T \Rightarrow \{5\} \subset T \Rightarrow T \in \tau_2 \Rightarrow \tau \subset \tau_2$

تعريف: لتكن A و B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء تبولوجي (E, τ)

1) يقال عن المجموعة A إنها كثيفة في B في الفضاء التبولوجي (E, τ) إذا وفقط إذا كان $B \subset \bar{A}$

2) يقال عن A إنها كثيفة في كل مكان في (E, τ) إذا وفقط إذا كانت كثيفة في كل مجموعة C من نقاط الفضاء (E, τ)

$C \subset \bar{A} \quad \forall C \subset E$

ملاحظات:

① إذا كانت A كثيفة في E في الفضاء (E, τ) هذا يعني أن $E \subset \bar{A}$

ولكن E تمثل كامل الفضاء المعطى لذلك: $\bar{A} \subset E \Leftarrow \bar{A} = E$

② تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في $(E, \tau) \Leftarrow$ فهي كثيفة في كل مجموعة $C \subset E$ $\Leftarrow$ A كثيفة في $\bar{A} = E \Leftarrow E \subset E$

$\Rightarrow$: لنفرض أن $\bar{A} = E$ ولتكن C مجموعة كيفية من نقاط (E, τ)

عندئذ تكون $C \subset E \Leftarrow C \subset \bar{A}$ أي A كثيفة في C وبما أن C كيفية $\Leftarrow$ A كثيفة في كل مكان في (E, τ)

نظرية: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E, τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E, τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$A \cap T \neq \emptyset \quad \forall T \in \tau \setminus \{\emptyset\}$

$\Leftarrow$ لدينا بالفرض A كثيفة في كل مكان في $(E, \tau) \Leftarrow \bar{A} = E$

ولنبرهن أن $A \cap T \neq \emptyset$ أيا كانت $T \in \tau \setminus \{\emptyset\}$;

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بما أنّ $T \neq \emptyset$ فإنّه يوجد نقطة واحدة على الأقل من x بحيث $x \in T$

عندئذٍ T مجاورة لـ x في (E,t)، وبما أنّ $x \in T \subset E = \bar{A} \Leftarrow \bar{A} = E$

$\Leftarrow x \in \bar{A}$ أيًا كانت $T \in V(x)$ لذلك حسب تعريف النقطة اللاصقة نجد أنّ $T \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$: نفرض أنّ $T \cap A \neq \emptyset$ أيًا كان $T \in t \setminus \{\emptyset\}$ ولنبرهن أنّ $\bar{A} = E$

لتكن $x \in E$ نقطة كيفية ولتكن V مجاورة كيفية لـ x في (E,t)

عندئذٍ حسب تعريف المجاورة توجد مجموعة مفتوحة مثل T تحقق:

$$x \in T \subset V \Rightarrow T \cap A \subseteq V \cap A$$

وبما أنّه حسب الفرض لدينا $T \cap A \neq \emptyset \Leftarrow V \cap A \neq \emptyset$ وبالعكس

الاختبار الكيفي لـ V من $V(x)$ نجد أنّ $x \in \bar{A}$، وبما أنّ x

نقطة كيفية من E نجد أنّ $E \subset \bar{A}$ ولدينا ولدينا $\bar{A} \subset E$ دومًا

نصل إلى $\bar{A} = E$ وهذا المطلوب.

تعريف: إذا كان (E,t) فضاء تبولوجي كيفيًا وكانت β أسرة

كيفية في المجموعات المفتوحة في هذا الفضاء (E,T) يقال عن الأسرة

β إنها تشكل قاعدة أو أساس للتبولوجيا T إذا وفقط إذا كانت

كل مجموعة مفتوحة في (E,T) تكتب على شكل اجتماع لعناصر الأسرة β

ملاحظات:

1) β قاعدة لـ $T \Leftrightarrow \beta \subset T$

2) $\forall T \in T$ و $T = \bigcup_{B \in \beta} B$

---

2) إذا كانت $E \neq \emptyset$ مجموعة كيفية و T تبولوجيا كيفية على E

وكانت $\beta = T$ فإننا نلاحظ أنّ $\beta = t$ هي أسرة المجموعات المفتوحة في (E,T)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي أنّ: $B \subset T$ ثم إنّه من أجل كل T بما أن $T=B$

بما أن: $T=T \cup T \cup T \cdots \cup T = B \cup B \cup B \cup \cdots \cup B \Leftarrow T = B \in B$

أي $T = \bigcup_{B \in B} B$

أي أن كل عنصر من T يكتب على شكل اجتماع لعناصر من B إذاً:

B قاعدة لـ T.

نستنتج أن كل توبولوجيا هي قاعدة لنفسها.

لاحظ أنّ عكس الملاحظة ② غير صحيح بصورة عامة أي ليست كل قاعدة هي توبولوجيا.

مثال: لنأخذ: $E=\{a,b,c\}$, $T=p(E)$

ونفرض أن: $B=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

- نلاحظ أن B لا تشكل توبولوجيا على E لأن $E \notin B$

كما نلاحظ أن: $B \subset T$

$\phi \in T \Rightarrow \phi = \phi \cup \phi$, $\phi \in B$

$\{a\} \in T \Rightarrow \{a\} = \{a\} \cup \{a\}$, $\{a\} \in B$

$\{a,b\} \in T \Rightarrow \{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}$, $\{a\}, \{b\} \in B$

$\{a,c\} \in T \Rightarrow \{a,c\} = \{a\} \cup \{c\} \cup \{\phi\}$, $\{a\}, \{c\}, \phi \in B$

$E \in T \Rightarrow E = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$; $\{a\}, \{b\}, \{c\} \notin B$

$\Leftarrow B$ تشكل قاعدة لـ T ولكن لا تشكل توبولوجيا على E

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z