كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

مجموعة $A=\{a,b,c,d\}$

$a\in A$

$\Omega=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$

أسرة جميع المجموعات الكلية: $P(\Omega)$

$\{a,b\}\subset A$ مجموعة محتواة في مجموعة

أسرة المنضرمنا هو مجموعة

فضاءات التبولوجية:

لتكن E المجموعة و $P(E)$ أسرة جميع المجموعات الجزئية من E

1) $T\subset P(E)$ حيث تحقق $E,\phi\in T$

2) $T_1\cap T_2\in T$ تقاطع عناصر من T هو من T

من أجل G_1 و G_2 من T (T تام) أيضاً

3) أياً كانت $\{G_i;\ i\in I\}$ أسرة جزئية من T

$\bigcup_{i\in I} G_i\in T$ أجتماع العناصر من T تام هو من تام

إذا تحققت الشروط الثلاثة عندئذٍ نقول أن الأسرة T تشكل توبولوجيا على E ونسمي الثنائية (E,T) فضاء توبولوجي حيث عناصر المجموعة E تسمى نقاط الفضاء التوبولوجي أما عناصر التوبولوجيا T تسمى مجموعات مفتوحة.

$A\subset E$ / A مفتوحة في $(E,T)\Leftrightarrow A\in T$

$T = \{\phi, E, \{a\}, \{b,c\}\}$

(ملاحظات ونتائج وأمثلة):

(1) إذا كانت $E = \phi$ هل يمكن تعريف التبولوجيا على E؟

$\{\} \neq \{\phi\}$

$T = P(E) = \{E\} = \{\phi\}$

ببساطة نجد أن T يحقق جميع البولوجيا أي أن T تحقق تبولوجيا على E لكن هذه التبولوجيا ليست لها أي فائدة عملية أو تطبيقية لذلك من الآن سنفترض عند تعريف التبولوجيا على E أنها غير خالية $E \neq \phi$

ملاحظة: $\{\} \neq \{\phi\}$

(2) نعمم الشرط الثاني من شروط التبولوجيا لتكن $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ أسرة كيفية منتهية من عناصر التبولوجيا T عندئذ نجد أن

$G_1, G_2 \in T$ لأن $G_1 \cap G_2 \in T$

$G_1' = G_1 \cap G_2$

$G_3 \in T$ و $G_1' \in T$ لأن $G_1' \cap G_3 \in T$

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \cap G_3 \in T$

$G_2' = G_1 \cap G_2 \cap G_3$

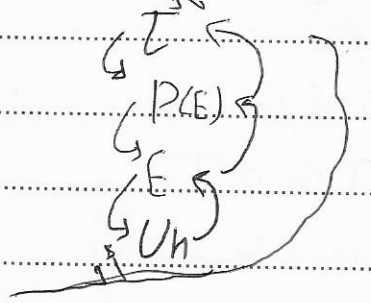
$G_2' \cap G_4 \in T$

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \in T$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{4} G_i \in T$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لتكن $E \neq \emptyset$ مجموعة كيفية من المناطق و لنعرف الأسرتين
$T_1 = P(E)$ و $T_2 = \{E, \emptyset\}$ و المطلوب
هل T_1 و T_2 تشكلان تبولوجيا على E؟
الحل: سهولة نبين أن T_1 تحقق شروط التبولوجيا لنلاحظ
فيما تشكل تبولوجيا على E بالنسبة لـ T_1 نلاحظ أن
$E \subset E$ أي أن $E \subset P(E) \Leftarrow E \in T_2$
$\emptyset \subset E$ أي أن $\emptyset \subset P(E) \Leftarrow \emptyset \in T_2$
أي أن $\emptyset, E \in T_2$ أي الشرط الأول محقق
$G \cap T \subset E \Leftarrow G \cap T \subset P(E) \Leftarrow G \cap T \in T_2$
و بالتالي فإن $G \cap T \subset E \Leftarrow G \cap T \subset P(E)$
$\Leftarrow G \cap T \in T_2$ و الشرط الثاني محقق
لتكن $\{G_i : i \in I\}$ أسرة جزئية كيفية من T_2
هذا يعني أن $i \in I$ و $G_i \in T_2 = P(E)$
$\forall i \in I \quad G_i \in P(E)$
و هذا يعني أن $\forall i \in I \quad G_i \subset E$
و هذا يعني أن $\bigcup_{i \in I} G_i \subset E$
$\bigcup G_i \in P(E)$
$\bigcup_{i=1} G_i \in T_2$



① كل مجموعة غير خالية يمكن أن نعرف عليها تبولوجيا واحدة أو أكثر بالحالة العامة
② تتساوى التبولوجيا الضعيفة مع التبولوجيا القوية على مجموعة غير خالية إذا و فقط إذا كانت المجموعة تحوي عنصر

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أثبت أنه إذا كانت ξ مجموعة وصيد المنصر فإن البنى لوصيا العزيزة تساوي البنى لوصيا الضعيفة.

بما أن ξ وصيد المنصر ξ هي A تقوي التالية

الضعيفة تساوي العزيزة

$\Leftarrow$ $P(\xi)$ تقوي التالية $\Leftarrow$ $P(\xi)$ و ξ من A

$\Rightarrow$

لنعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية R الأسرة T على الشكل الآتي:

$T = \{T \in P(R) ; 1 \in T\} \cup \{\phi\}$

أثبت أن T تشكل بنى لوصيا على R.

① من تعريف T نلاحظ أن $\phi \in T$

$R \in P(R) \in 1 \in R \Rightarrow R \in T$

الشرط الأول محقق.

لنأخذ T و G من T لدينا حالتين:

إذا كانت إحدى المجموعتين T و G على الأقل خالية فإن

$T \cap G = \phi \in T$

أما إذا كانت $T \neq \phi$ أي $G \neq \phi$ فإن

$T \in T \Leftrightarrow T \in P(R) \in 1 \in T$

$G \in T \Leftrightarrow G \in P(R) \in 1 \in G$

$T \cap G \in P(R) \Rightarrow 1 \in T \cap G \Rightarrow T \cap G \in T$

والشرط الثاني محقق.

لنأخذ $\{G_i ; i \in I\}$ أسرة كيفية من عناصر T فيوجد حالتين

$\bigcup_{i \in I} G_i = \phi \in T$ خالية $\forall i \in I$ $G_i \neq \phi$ فإن

أي أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in T$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أما إذا وجد عنصر واحد على الأقل من الأسرة $\{G_i : i \in I\}$ هو G_{i_0} يكون $G_{i_0} \neq \emptyset$ عندئذٍ بسبب كون T G_{i_0} يجب أن يكون $1 \in G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ ولذلك فإن $\bigcup_{i \in I} G_i \in T$ إذاً $\bigcup_{i \in I} G_i$ يحقق الشرط الثالث بمعنى.

تعريف: إذا كانت T_1 و T_2 توبولوجيتين معرفتين على مجموعة $E \neq \emptyset$ يجب أن $T_1 \subseteq T_2$ عندئذٍ يقال أن التوبولوجيا T_1 أضعف من التوبولوجيا T_2 وعندئذٍ نكتب $T_1 \leq T_2$

ملاحظة:

① أياً كانت T توبولوجيا معرفة على E بسبب الشرط الأول فإن $E \in T$ و $\emptyset \in T$ فإن $\emptyset$ و E تكون التوبولوجيا معرفة على E لذلك بسمى توبولوجيا ضعيفة

② من تعريف التوبولوجيا لدينا أياً كانت T توبولوجيا معرفة على E فإن T أسرة جزئية من $P(E)$ أي أن $T \subseteq P(E)$ لذلك فإن $P(E)$ أقوى من T أياً كانت T توبولوجيا معرفة على E لذا سوف نسميها بالتوبولوجيا القوية.

بعض مواهب المجموعات المفتوحة:

① من تعريف المجموعات المفتوحة من الشرط الأول من الشروط الـ ٣ تعريف التوبولوجيا ينتج أن المجموعتين E و $\emptyset$ مجموعتين مفتوحتين في أي فضاء توبولوجي.

② أي تقاطع منتهي للمجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة في أي فضاء توبولوجي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ اجتماع مجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة في أي فضاء بتولوجي

برهان: ليكن (X,T) فضاء بتولوجي كيفي، ولتكن A مجموعة كيفية من مقاطع هذا الفضاء

حيث كل مجموعة A_i هي مجموعة مغلقة في الفضاء (X,T)

إذاً فقط إذا كانت متممتها $X\setminus A_i$ مفتوحة في (X,T)

ونرمز بـ $\mathcal{F}$ للأسرة جميع المجموعات المغلقة من الفضاء (X,T)

مثال: $X=\{a,b,c\}$ عرف عليها الأسرة T كالتالي:

$$T=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\}\}$$

مجموعات مفتوحة، يجب أثبات أيضاً بتولوجيا تكوين أي مجموعة منها هي مجموعة مفتوحة

المغلقة: تضم المجموعات المفتوحة

$$\mathcal{F}=\{\phi,X,\{b,c\},\{b\}\}$$

مفتوحة $T=\{T\subset P(R),\ 1\in T\}\cup\{\phi\}$

$\mathcal{F}=\{F\subset P(R),\ 1\notin F\}\cup\{R\}$

خواص المجموعات المغلقة: تضم المغلقة المفتوحة

① لدينا بحسب خواص المجموعات المفتوحة ϕ, X مجموعتان مفتوحتان في أي فضاء بتولوجي (X,T) لذلك فإن متممة كل منهما مجموعة مغلقة أي أن ϕ, X مجموعتان مغلقتان في أي فضاء بتولوجي (X,T)

② لتكن $\{F_1,F_2,\dots,F_n\}$ أسرة كيفية منتهية من مجموعات المغلقة في (X,T) عندئذٍ بحسب قوانين المجموعة المغلقة يكون $\{F/F_1, F/F_2, \dots, F/F_n\}$ أسرة منتهية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مجموعات المفتوحة في (E, T) لذلك يجب توافر

المجموعات المفتوحة تكون: $\bigcap_{i=1}^{n} E/F_i$ مجموعة مفتوحة

ولكن حسب دمورغان لدينا:

$$\bigcap_{i=1}^{n} (E/F_i) = E/\bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

ولذلك تكون المجموعة: $E/\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مفتوحة (E, T)

وبالتالي حسب تعريف المجموعات المغلقة تكون

$\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مجموعة مغلقة في (E, T)

أيضاً الاجتماع المنتهي لمجموعات مغلقة هو

مجموعة مغلقة في الفضاء التبولوجي.

(3) لتكن: $\{F_i ; i \in T\}$ أسرة كيفية من المجموعات المغلقة

في الفضاء (T, E) عندئذٍ الاستفادة من تعريف المجموعات

المغلقة ~~في الفضاء التبولوجي~~ $\{E/F_i ; i \in T\}$

مجموعة مفتوحة وبسبب العامة أي اجتماع للمجموعات

المفتوحة هي مجموعة مفتوحة في أي فضاء تبولوجي ونعلم أن

$\bigcup_{i \in T} (E/F_i)$ مجموعة مفتوحة وبسبب ~~هي~~ دمورغان

$\bigcup_{i \in T} (E/F_i) = E/\bigcap_{i \in T} F_i$ لدينا:

أي أن $E/\bigcap_{i \in T} F_i$ مجموعة مفتوحة.

لذلك عند تعريف المجموعة المغلقة بأنها

مجموعة مغلقة في (T, E)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة